

O potrzebie abstrakcyjnego myślenia

Jacek Cichoń

Jacek.Cichon@pwr.edu.pl

Katedra Informatyki
Wydział Podstawowych Problemów Techniki
Politechnika Wroclawska

grudzień 2016



Zainteresowania naukowe

- matematyka: teoria mnogości, topologia, teoria miary
- informatyka teoretyczna: algorytmika, algorytmu zrandomizowane

Dydaktyka

- matematyka: Analiza Matematyczna, Algebra, Matematyka Dyskretna, Rachunek Prawdopodobieństwa, Kombinatoryka Analityczna (głównie na Wydziale WPPT)
- informatyka: algorytmy zrandomizowane, technologie internetowe, grafika komputerowa, automatyczna weryfikacja
- zajęcia z matematyki dla uczniów ZSA PWr



Pytanie po wykładzie z Algebry

Co mam zrobić jeśli **niczego** nie rozumiem ?

Dyskusja

- **ja**: Proszę podać jakiś przykład.
- **student**: O, tutaj na tablicy jest jeszcze napisane $2 + 2 = 1$
- **ja**: I tak ma być. Liczyliśmy wtedy w ciele \mathbb{Z}_3 .
- **student**: No właśnie, ale przecież $2 + 2 = 4$!!!
- **ja**: Ale my liczyliśmy w \mathbb{Z}_3 a nie w \mathbb{N} .
- **student**: No właśnie, dlatego niczego nie rozumiem.
- **ja**: ??????
- **student** A najbardziej nienawidzę zadań, które zaczynają się od słowa **udowodnij** lub **uzasadnij**.

Część I

- **student:** A ja się **nie zgadzam** z tym, że $A \cup B = B \cup A$ dla dowolnych zbiorów A i B .
- **ja:** Nie rozumiem pytania; co to znaczy, „nie zgadzam się”?
- **student:** Bo jak ja mam zbiór trzech jabłuszek i czterech gruszek, to mogę sprawdzić, że to się zgadza
- **ja:** I co dalej?
- **student:** Ale jak nie wiem, co to jest A ani co to jest B , to nie wiem, co to jest $A \cup B$ i **tym bardziej**, co to jest $B \cup A$.
- **ja:** ?????



Część II

- **ja:** A jak się definiuje sumę dwóch zbiorów?
- **student:** Przyjmuje się, że są to elementy które są w tych zbiorach
- **ja:** A dokładniej?
- **student:** no tak jak powiedziałem
- **ja:** A jak suma zbiorów była zdefiniowana na wykładzie ze Wstępu do Logiki i Teorii Mnogości?
- **student:** nie pamiętam co dokładnie było napisane na tablicy, nie notowałem, bo przecież każdy wie co to jest suma zbiorów.



Powszechność zjawiska

- Większość studentów (ok. 50%) z którymi się spotykam nie ma z tym większych problemów
- Poważne problemy: około 30 % studentów I roku
- Przytoczone przykłady dyskusji były ze studentami, którzy na maturze otrzymali ocenę **5.0** z matematyki

Abstrakcja, abstrahowanie

Jedna z operacji umysłowych, także proces uczenia się pojęć. Proces abstrahowania polega na pomijaniu różnic między egzemplarzami danego zbioru i wyodrębnianiu ich cech wspólnych. Abstrahowanie prowadzi do wyodrębnienia pojęć i jest ściśle związane z myśleniem formalnym w teorii Piageta.

Podstawowy dokument

Podstawa programowa z komentarzami. Tom 6. Edukacja matematyczna i techniczna w szkole podstawowej, gimnazjum i liceum - matematyka, zajęcia techniczne, zajęcia komputerowe, informatyka.

Dokument podpisała **Katarzyna Hall** - Minister Edukacji Narodowej (2007-2011)

- Komentarz do podstawy programowej przedmiotu matematyka – Zbigniew Semadeni, Marcin Karpiński, Krystyna Sawicka, Marta Jucewicz, Anna Dubiecka, Wojciech Guzicki, Edward Tutaj
- Komentarz do podstawy programowej przedmiotu informatyka – Maciej Sysło, Wanda Jochemczyk



Podstawa programowa - matematyka

Pamiętać należy, że nie jest celowe budowanie aparatu pojęciowego do podania np. **abstrakcyjnej** definicji funkcji, bowiem dla ucznia i tak funkcja będzie jedną z tych niewielu, z którymi się zapoznał (liniowe, kwadratowe, trygonometryczne). Sensowne jest natomiast nauczanie wzbogacające o nowe, konkretne fakty, dla których usystematyzowania **w przyszłości** uczeń zaakceptuje pojęcia mnogościowe.

Podstawa programowa - informatyka

Z taką funkcją uczeń powinien sobie poradzić:

```
bool isTriangle(float a, float b, float c){  
    return (a<b+c) && (b<a+c) && (c<a+b);  
}
```


Podstawa programowa - informatyka

$$\text{isTriangle} : [0, \infty)^3 \rightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

$$\text{NWD} : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

Podstawa programowa - matematyka

uczeń zna tylko funkcje liniowe, kwadratowe, trygonometryczne

Niezgodność

COŚ TU NIE GRA !!!

Obserwacje

- 1 Nie znali dowodu niewymierności liczby $\sqrt{2}$ ani twierdzenia Pitagorasa.
- 2 Kilku z nich nie rozumiało pojęcia „dowód”.
- 3 Matematyka: „umiejętność poprawnego myślenia” → „umiejętność stosowania wzorów” (**kompetencje społeczne całkowicie wyparły wiedzę**).
- 4 Informatyka \equiv umiejętność programowania.

Podstawa programowa - jedyne wystąpienie słowa „dowód” (w wersji negatywnej)

Nie spodziewamy się, że po wykonaniu konstrukcji uczeń potrafi zapisać bardzo precyzyjnie wszystkie jej etapy ani **że potrafi podać** formalny **dowód** poprawności konstrukcji.

Niewymierność liczby $\sqrt{2}$

Podstawa programowa - matematyka

Dlaczego w podstawie dla gimnazjum i liceum nie wspomniano o niewymierności liczby π i liczby $\sqrt{2}$?

By uzmysłwić sobie, że niewymierność tych liczb nie ma żadnego wpływu na szkolny zakres wiedzy, pomyślmy, co by było, gdyby $\sqrt{2}$ był jednak liczbą wymierną, ale zapisywałby się za pomocą ułamka, którego licznik i mianownik miałyby jakąś ogromną liczbę cyfr, np. milion cyfr, może nawet więcej cyfr niż jest atomów we wszechświecie. Co wynikałoby z tej wymierności? Nic.

Mój komentarz

Panie profesorze Zbigniewie Semadeni, panie doktorze habilitowany Wojciechu Guzicki: gdyby liczba $\sqrt{2}$ była wymierna to matematyka byłaby **sprzeczna**.



Dowód niewymierności

- Hipppasus z Metapontum (legenda); ok. V wiek p.n.e. [ok. 2500 lat temu]
- jeden z pierwszych dowodów w historii ludzkości - jedna z pereł dorobku naszej cywilizacji
- podstawowy dowód (parzystość/nieparzystość) jest piękny
- pamiętam to tej pory ten moment (około 5 klasy szkoły podstawowej) gdy zrozumiałem ten dowód
- szkoda **programowo** pozbawiać naszej młodzieży dostępu do tak pięknych rzeczy



Podstawa programowa - matematyka

Maturzysta nie będzie miał obowiązku znajomości **symboli logiki** formalnej. ... Znajomość ogólnych pojęć i symboli rachunku zdań i kwantyfikatorów nie jest ani warunkiem koniecznym, ani dostatecznym dla logicznego rozumowania w matematyce. **Przekonali się o tym wielokrotnie wykładowcy wyższych uczelni**: student może znać te symbole, ale nieraz nie ułatwia mu to prowadzenia poprawnego rozumowania.

Podstawa programowa - informatyka

11) opisuje podstawowe algorytmy i stosuje: ... f) algorytmy badające własności geometryczne, np.: – sprawdzanie warunku trójkąta, ...

```
bool isTriangle(float a, float b, float c){  
    return (a<b+c) && (b<a+c) && (c<a+b);  
}
```

Co z zasadą indukcji?

Podstawa programowa - matematyka

Zasada indukcji matematycznej została usunięta całkowicie, również z zakresu rozszerzonego. **Jest specyficznie trudna**. Stosowanie jej stało się pewnym **rytuałem**, którego sens pojmowali nieliczni uczniowie.

Podstawa programowa - informatyka

- ocenia własności rozwiązania algorytmicznego (komputerowego), np. zgodność ze specyfikacją, efektywność działania
- posługuje się metodą „dziel i zwyciężaj” w rozwiązywaniu problemów;
- stosuje rekurencję w prostych sytuacjach problemowych



Do czego jest potrzebna indukcja matematyczna ?

Sortowanie przez wstawianie

Analiza złożoności obliczeniowej najgorszego i średniego przypadku

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Rekursja - uzasadnienie poprawności

Jeśli

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left((\forall k < n) (\phi(k)) \rightarrow \phi(n) \right)$$

to

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \phi(n)$$



Podstawa programowa - matematyka

W zakresie **podstawowym** ważne jest wymaganie: *uczeń wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180° .*

Konferencja w Ministerstwie Edukacji Narodowe

Majstrzy w pewnej fabryce nie dopuścili do nowoczesnych tokarek praktykantów ze szkoły zawodowej, bo stwierdzili, że nie będą ich uczyli trygonometrii !!!

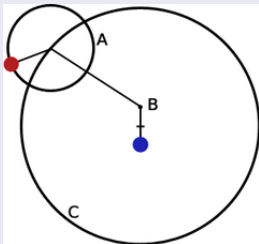
Nowa propozycja programowa: 30-11-2016

Kąty w zakresie 180° wchodzi do szkoły podstawowej !!!

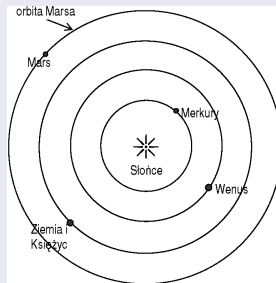


Slajd dedykowany Komisji która opracowała dzisiaj obowiązującą podstawę

Modele układu słonecznego



Rysunek: Model Ptolemeusza - ok. 100-160 n.e.



Rysunek: model heliocentryczny: Arystarch z Samos: III wiek p.n.e.; Kopernik: 1473-1543

Dobre licea

Absolwenci **niektórych** liceów są bardzo dobrze przygotowani do studiów.

Absolwenci niektórych liceów

- Mają opanowane pewne elementy matematyki na poziomie operacyjnym; oto dość ekstremalny przykład:

$$\dots \quad x^2 - x = 0; \quad \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{1 - 1}{2} = 0; \quad x_2 = \frac{1 + 1}{2} = 1; \quad \dots$$

- Udało im się skończyć liceum bez zapoznania się z jakimkolwiek dowodem

Apel do nauczycieli przedmiotów ścisłych

- Nie przejmujcie się podstawami programowymi - traktujcie je tylko jako **ABSOLUTNE MINIMUM**.
- Wiecie jak dobrze uczyć swoich przedmiotów, więc róbcie to !!!
- Próbujcie koordynować zajęcia ze wszystkich przedmiotów ścisłych w swojej szkole- to zadanie całkowicie **przerosło intelektualnie** zespoły układające obecnie obowiązujące podstawy programowe.
- Patrzcie bardzo uważnie na efekty pracy komisji układających nowe podstawy programowe - **ich nazwiska znam od kilku dni; dr hab. Maciej Borodzik (IM UW) jest świetnym matematykiem.**



Nowa podstawa programowa dla klas I-VIII: 30-11-2016

Fragment z założeń wstępnych (pierwsza strona)

Etap formalny to czas, kiedy następuje rozwój umiejętności abstrakcyjnych, a uczeń potrafi prowadzić rozumowanie z wykorzystaniem obiektów **abstrakcyjnych**.

Dopiero na tym etapie rozwoju uczeń jest w stanie zrozumieć niektóre pojęcia algebraiczne, pojęcie prawdopodobieństwa czy bardziej zaawansowane własności figur geometrycznych.

W tym czasie rozpoczyna się nauka, czym jest **dowód matematyczny**; uczeń może samodzielnie przeprowadzać dowody matematyczne w prostych sytuacjach.



Mamy wspaniałą młodzież

Co chcą poznać uczniowie I klasy liceum ZSA?

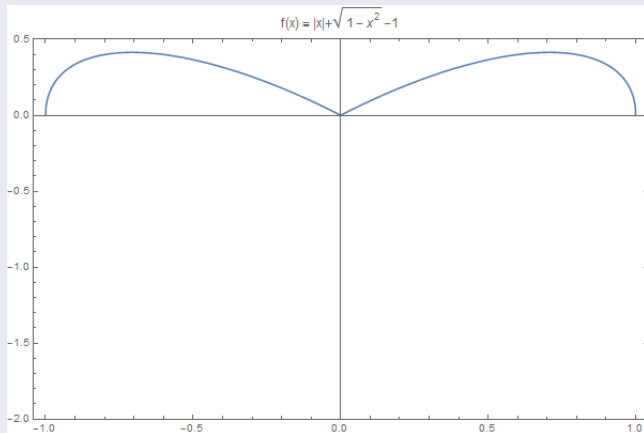
- liczby zespolone,
- spiralę Ulama,
- bryły platońskie,
- rachunek różniczkowy,
- teoria gier, kryptografia, paradoks Banacha - Tarskiego, niewymierność liczb, fraktale, złotą proporcję, ...

Cel

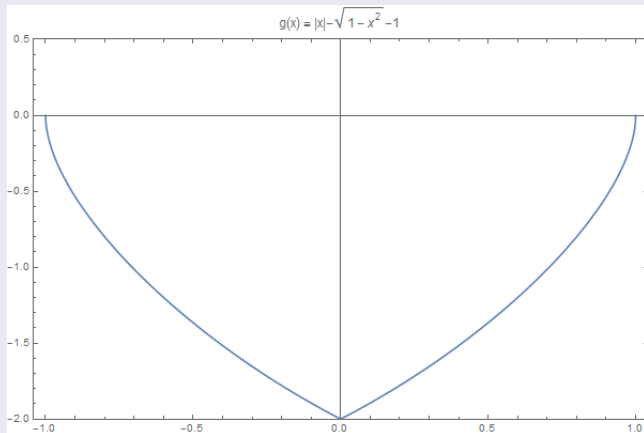
Uczniowie ZSA poznają większość tych zagadnień, o ile aktualna reforma edukacji nie uniemożliwi tego.



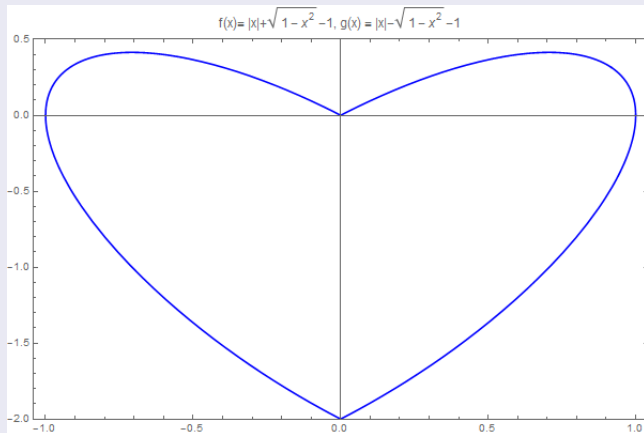
Wykresami funkcji można fajnie się bawić



Wykresami funkcji można fajnie się bawić

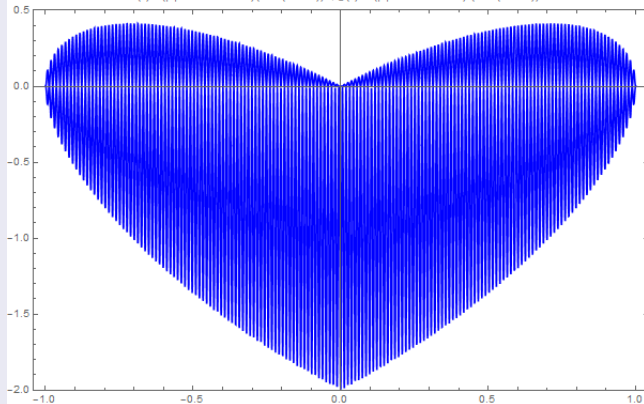


Wykresami funkcji można fajnie się bawić

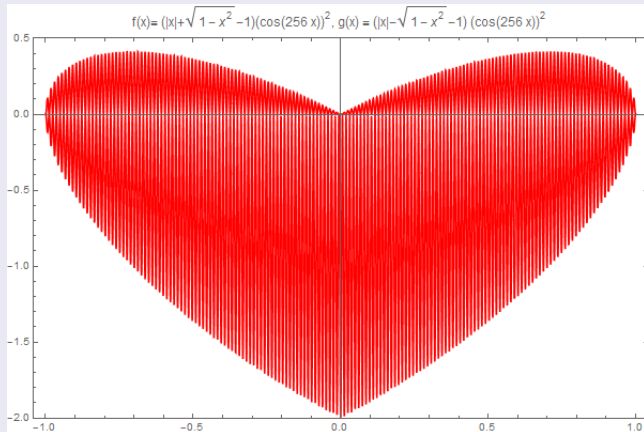


Wykresami funkcji można fajnie się bawić

$$f(x) = (|x| + \sqrt{1 - x^2} - 1)(\cos(256x))^2, \quad g(x) = (|x| - \sqrt{1 - x^2} - 1)(\cos(256x))^2$$



Wykresami funkcji można fajnie się bawić



Kontakt

- email: Jacek.Cichon@pwr.edu.pl
- WWW: <http://www.cs.pwr.edu.pl/cichon/>

Dziękuję

