

Myślenie komputacyjne w kształceniu matematycznym

Dlaczego nauczanie matematyki
chce się obejść bez informatyki?

Maciej M. Sysło
UWr, UMK, WWSI
syslo@ii.uni.wroc.pl

Motto

Celem obliczeń nie są liczby, a rozumienie

The purpose of computing is insight not numbers

[R.W. Hemming, 1959]

Note: w 1959 roku obliczenia były głównie na papierze

Traktujemy tutaj computing, nie tylko jako działania wokół komputerów, ale jako **procesy myślowe – myślenie komputacyjne**

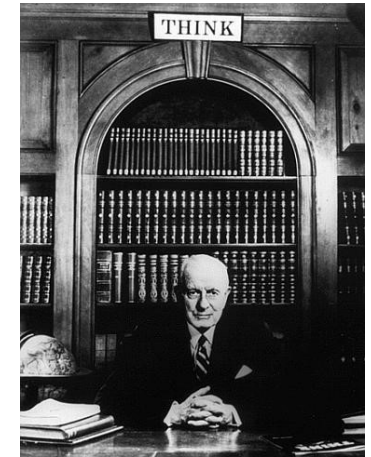
Celem programowania nie są programy, ale abstrakcja

The purpose of programming is abstraction not programs

Mądrością staje się **symbioza** tego,
w czym **mózg** jest najlepszy,
z tym, co **komputer** potrafi wykonać nawet lepiej

[Mark Prensky, 2013]

Ta symbioza wymaga jednak **mózgu**, myślenia,
a więc będzie tutaj **o myśleniu:**



Plan

- Dlaczego jest źle z kształceniem matematycznym
- Technologia w nauczaniu matematyki
- **Myślenie komputacyjne**
 - abstrakcja
 - redukcja i dekompozycja
 - aproksymacja, przybliżanie
 - rekurencja, logarytm
 - heurystyka
- Powiązania: matematyka a informatyka
 - **pojęcie funkcji** – brak na matematyce (K-8), a od początku na informatyce
 - wartość pierwiastka – przykład **modelowania obliczeniowego**, matematycznego
 - potęgowanie – **rekurencja, efektywność**
 - NWD, algorytm Euklidesa – **logarytm**
 - geometria a **grafy**

Wady w uczeniu matematyki

Wady w nauczaniu i w uczeniu się matematyki w szkołach, jak i w

- uwaga skupiona
 - wzory jako interpretacji
 - algorytmy j
 - a więc, brak
 - brak rzeczy
- stąd brak m

Niektóre *mental tools* zaliczane do myślenia komputacyjnego, a więc wywodzące się z informatyki, mogą pomóc studentom:

- skupić **uwagę na problemie**, niż na obliczeniach
- rozwinąć **kreatywne myślenie** w matematyce posługując się CT mental tools
- wyjść **poza wzory**
- **tworzyć algorytmy** zamiast korzystać z czarnych skrzynek
- **stosować w praktyce** pojęcia i metody matematyczne

Nieco odmienne traktowanie **algorytmów** w matematyce i informatyce.

Matematyka

- (W.W. Sawyer): Matematyka, to ... skrzynka z narzędziami
narzędzie = algorytm = zamknięty schemat

Informatyka

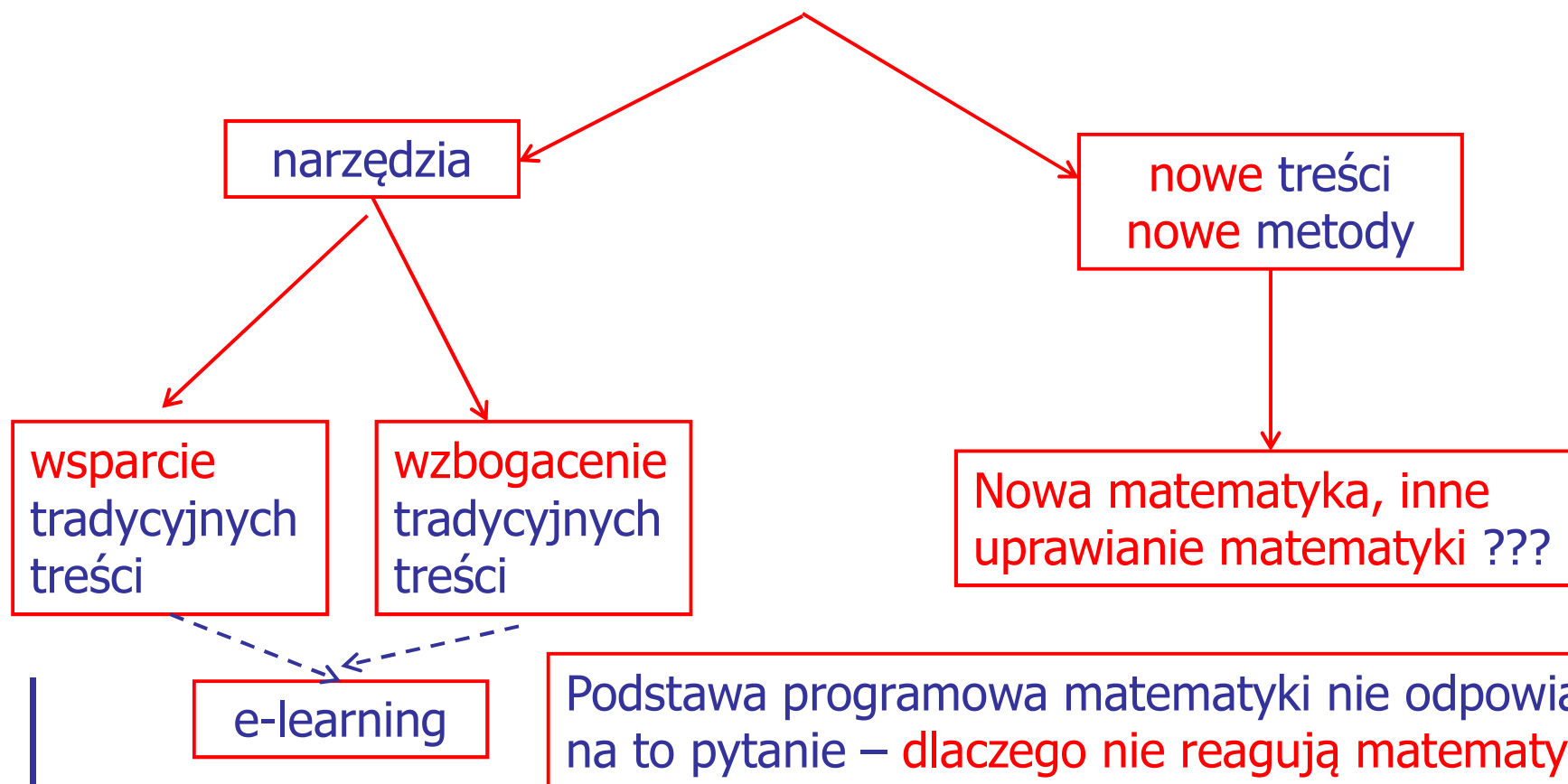
- **Algorytm**: celem działania, **obiekt twórczości**, rozwoju, pielęgnacji, ...

Szansa dla matematyki – **nowe spojrzenie płynące z informatyki**

Inny problem: komputer, technologia – **nie występują w podstawie mat, fiz**

Komputery a matematyka (szkolna/uczelniana)

W jakim stopniu (i czy?) informatyka, komputery i technologia powinna zmienić matematykę i jej nauczanie?



Podstawa programowa dla informatyki – K-12

Wspólne Cele kształcenia – Wymagania ogólne – dla wszystkich etapów

- I. **Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów** na bazie logicznego i abstrakcyjnego myślenia, myślenia algorytmicznego i sposobów reprezentowania informacji.
- II. **Programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera oraz innych urządzeń cyfrowych**: układanie i programowanie algorytmów, organizowanie, wyszukiwanie i udostępnianie informacji, posługiwanie się aplikacjami komputerowymi. ← **Technologia**
- III. **Posługiwanie się komputerem, urządzeniami cyfrowymi i sieciami komputerowymi**, w tym: znajomość zasad działania urządzeń cyfrowych i sieci komputerowych oraz wykonywania obliczeń i programów.
- IV. **Rozwijanie kompetencji społecznych**, takich jak: komunikacja i współpraca w grupie w tym w środowiskach wirtualnych, udział w projektach zespołowych oraz organizacja i zarządzanie projektami.
- V. **Przestrzeganie prawa i zasad bezpieczeństwa**. Respektowanie prywatności informacji i ochrony danych, netykiety, norm współżycia społecznego, praw własności intelektualnej; ocena i uwzględnienie zagrożeń, związanych z technologią.

Spiralna realizacja na kolejnych etapach
Spiralny rozwój zasobów (J. Bruner)

Tok zajęć – rozwiązywanie problemów

SP: Klasy 1-3

Praca z rzeczywistą sytuacją problemową: na podłodze obrazki zwierząt




- zebranie informacji i danych – **abstrakcja**: wszystkie dane są potrzebne
Sytuacja: na podłodze obrazki zwierząt
Problem: znajdź najbliższego ptaka
- wykrywanie w danych dla problemu
Dane: selekcja/wybór ptaków – kura ptakiem? lata? – **abstrakcja**
- analiza danych i **reprezentacja** danych: lista, tabela, tabele powiązane
Zasada w danych: zwierzę, które lata (?)
- **dekompozycja** danych i/lub **problemu**
Reprezentacja danych: ptaki w rzędzie, w jakiejś kolejności (**lista**, **ciąg**)
- projektowanie algorytmu – modelowanie
Dekompozycja: np. na domowe i inne
 - podejście ad hoc – **heurystyka**
 - **metody/algorytmy informatyczne**: algorytm: losowy wybór, systematyczny algorytm: przeglądanie liniowe – **abstrakcja**, bo liczy się tylko waga
 - współbieżność, interakcja – zdarzenia
 - automatyzacja rozwiązania – program – **abstrakcja sytuacji zewnętrznej**
- **symulacja komputerowego/computerowego**
Modyfikacje danych – inne zwierzęta, metody: **uporządkuj** od najbliższych
 - testowanie i poprawianie
 - głębsza analiza problemu oraz modelowanie
Komputer, program: **projekt** w Scratchu, w innym języku – **automatyzacja** sytuacji **wyabstrahowanej** – liczby




Abstrakcja: Sudoku, 1 klasa szkoły podstawowej



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 ...




Proste Sudoku – kwadrat łaciński

Uzpełnij poniższy kwadrat tak, aby każda figura występowała dokładnie raz w każdym wierszu i w każdej kolumnie – jest to tak zwany kwadrat łaciński.

☆☆☆









Pojęcia („z tyłu głowy ucznia”):





- dekompozycja,
- rozkład zadania/problemu,
- kroki
- praca krokowa




1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 ...

Sudoku ze zwierzętami

Rozwiąż poniższe Sudoku – w każdym wierszu, w każdej kolumnie i w każdym zaznaczonym kwadracie 2 x 2 powinny się znaleźć różne zwierzęta.


☆☆☆

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 ...

Sudoku III

Rozwiąż następujące Sudoku – w każdym wierszu, w każdej kolumnie i w każdym zaznaczonym kwadracie 3 x 3 powinny się znaleźć wszystkie liczby od 1 do 9 i to tylko raz.

2		4	1	5		8	9	3
9	1		6	8	4	7	2	5
7		8	9	2	3	1		4
5	8		7	1	9		3	6
1	4	6	2	3		5	7	9
	7	9	5	4	6		1	8
8	2		3	6	5		4	1
4	3	1	8	9		6	5	7
6	9		4	7	1	3		2

☆☆☆

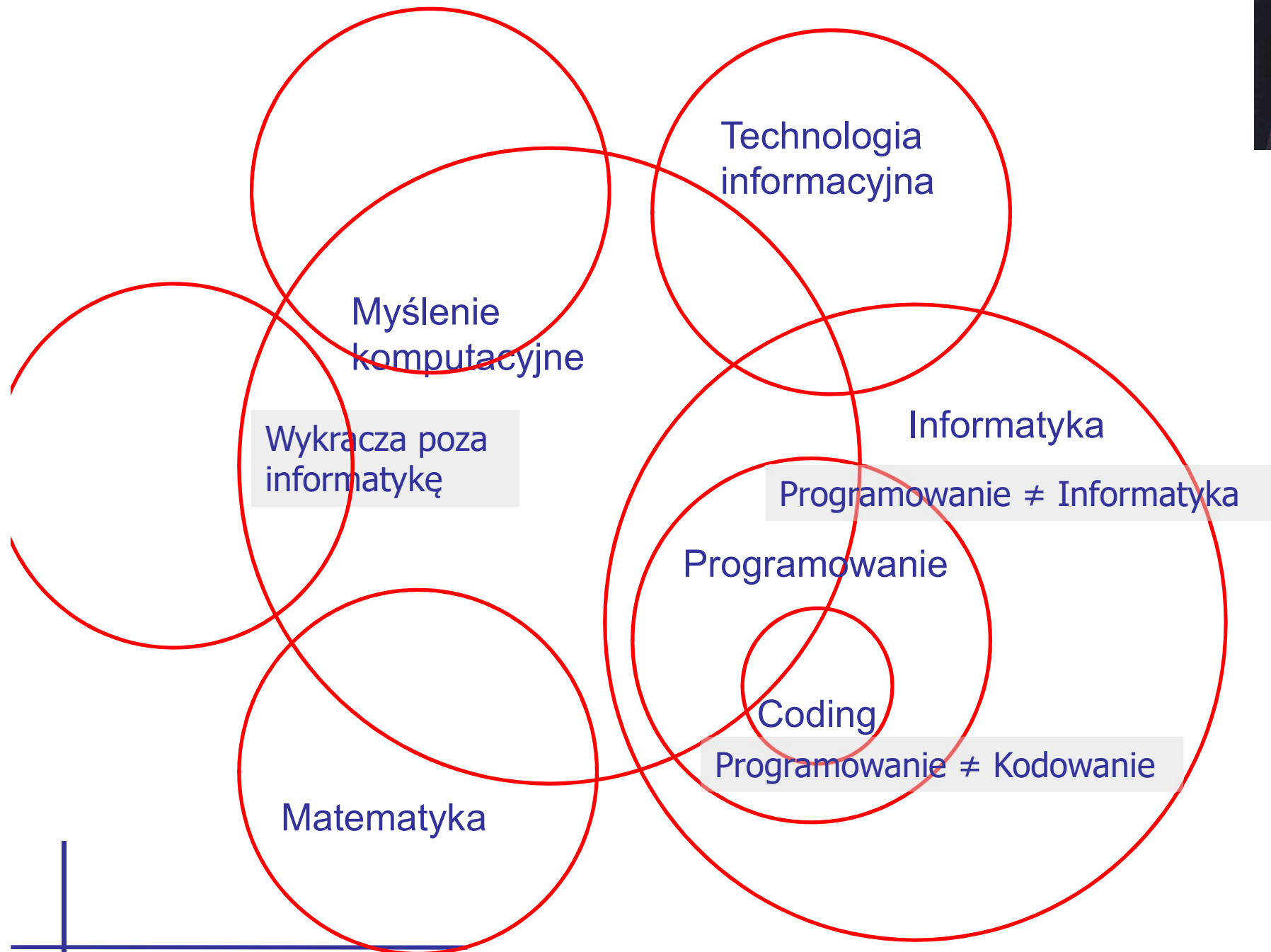
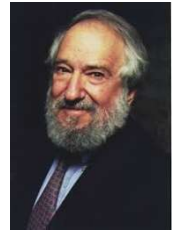
Myślenie komputacyjne (MK) – 3R + MK

J. Wing, 2006: użyteczne postawy i umiejętności, jakie każdy, nie tylko informatyk, także matematyk powinien starać się wykształcić i stosować to procesy myślowe angażowane w formułowanie problemu i przedstawianie jego rozwiązań w taki sposób, aby komputer – człowiek lub maszyna – mógł skutecznie wykonać.

Umiejętności składające się na MK:

- **abstrakcja, redukcja i dekompozycja** złożonych problemów
- **tworzenie przybliżonych rozwiązań (aproksymacji)**, gdy dokładne rozwiązanie nie jest możliwe
- **stosowanie rekurencji**, czyli myślenia indukcyjnego (rekurencja = iteracja)
- **tworzenie reprezentacji i modelowania** danych, problemów i rozwiązań
- **stosowanie heurystyk** (G. Polya, *Jak to rozwiązać*)





Kilka powiązań: matematyka a informatyka

- **pojęcie funkcji** – brak na matematyce (K-8) od początku na informatyce
- wartość pierwiastka – przykład **modelowania obliczeniowego**, matematycznego
- potęgowanie – **rekurencja, efektywność**
- NWD, algorytm Euklidesa – **logarytm**
- geometria a **grafy**

Funkcja

Brak tego pojęcia w **podstawie matematyki I – VIII klasa !!!**

W warunkach i sposobach realizacji podstawy:

... operowanie wykresami zależności pozwala na intuicyjne opanowanie **trudnych i abstrakcyjnych pojęć takich jak funkcja**, monotoniczność, ekstrema, przy użyciu minimalnej wiedzy matematycznej (**nie należy wprowadzać tych pojęć w szkole podstawowej**).

Ale funkcja, to także sposób obliczania jej wartości – **algorytm**
I tej dodatkowej wiedzy dostarcza połączenie **matematyka+informatyka**

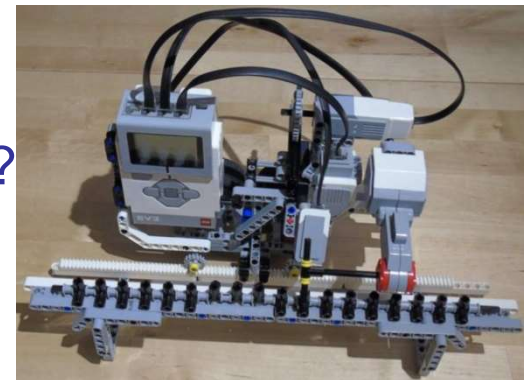
Specyfikacja problemu/algorytmu.

Dane: dziedzina problemu, algorytmu

Wynik: przeciwdziedzina algorytmu

A co to jest **algorytm**?

Czy potrzebna jest **maszyna Turinga**? **Mamy ją!**



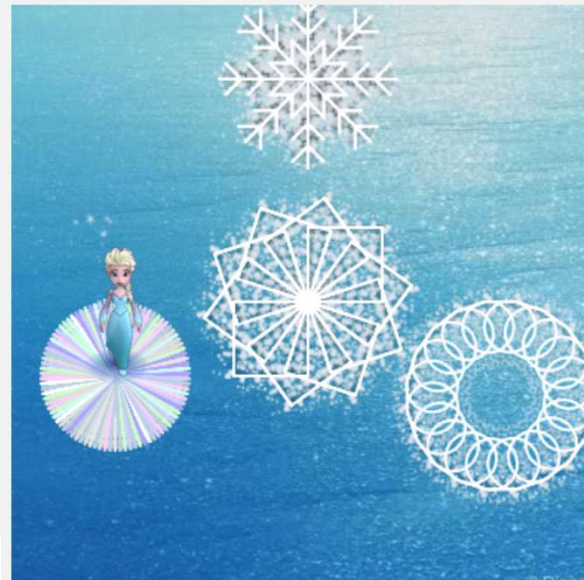
Funkcja w programowaniu: Godzina kodowania, klasy 4-6

C O
D E Etap



```
po uruchomieniu
narysuj kwadrat 25
skocz do przodu o 100 piksele
narysuj kwadrat 50
skocz do przodu o 100 piksele
narysuj kwadrat 75
```

C O
D E Koduj z Anną i Elsa



```
po uruchomieniu
skocz do tyłu o 150 piksele
utwórz śnieżynkę typu fraktal
skocz do przodu o 150 piksele
utwórz śnieżynkę typu kwadrat
skręć w lewo o 90 stopnie
skocz do przodu o 120 piksele
utwórz śnieżynkę typu spirala
skręć w prawo o 180 stopnie
skocz do przodu o 250 piksele
skręć w lewo o 90 stopnie
idź do przodu 50 piksele
utwórz śnieżynkę typu linia
```

Potęgowanie

W podstawie matematyki, VII – VIII klasa:

1. Potęgi o podstawach wymiernych. Uczeń:
 - 1) zapisuje iloczyn jednakowych czynników w postaci potęgi o wykładniku całkowitym dodatnim;
 - 2) mnoży i dzieli potęgi o wykładnikach całkowitych dodatnich;
 - 3) mnoży potęgi o różnych podstawach i jednakowych wykładnikach;
 - 4) podnosi potęgę do potęgi;

Nie ma przykładów! **Po co są te operacje?**

A może przykład praktyczny? Kryptografia RSA

Potęgowanie w praktyce

Oblicz (RSA):

$$x^{123456789123456789123456788912345}$$

Na matematyce:

$$x^n = x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x$$

n – 1 mnożeń: 12345678912345678912345678912344

Superkomputer $10^{15} = 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ oper/sek

12345678912345678,912345678912344 · sekund

12345678912345678,912345678912344/60 = 205761315205761,31520576131520567 · minut

205761315205761,31520576131520567/60 = 3429355253429,3552534293552534278 · godzin

3429355253429,3552534293552534278/24 = 142889802226,22313555955646889282 · dób

142889802226,22313555955646889282/365 = 391478910,20883050838234649011733 · lat

To będzie trwało $3 \cdot 10^8$ lat

Rozwiązanie informatyczne

```
Power(x, n) { x^n }
```

```
  if n=1 then Power:=x
```

```
  else if n - even then
```

```
    Power:=Power(x, n/2)^2
```

```
    else Power:=Power(x, n-1)*x
```

$$x^{22} = (x^{11})^2 = (x^{10}x)^2 = ((x^5)^2x)^2 = (((x^2)^2x)^2x)^2:$$

$$\{x^n = (x^{n/2})^2\}$$

$$\{x^n = (x^{n-1})x\}$$

$$x^2, x^4, x^5, x^{10}, x^{11}, x^{22}$$

6 mnożeń zamiast 21

Liczba operacji: :

liczba bitów w reprezentacji binarnej $n - \log_2 n$

plus

liczba 1-ek w binarnej reprezentacji $n - \log_2 n$

Razem co najwyżej $2 \cdot \log_2 n$ operacji

Dla

$x^{12345678901234567890123456789012345}$

Tylko **200 mnożeń – SZOK!**

m	$\log_2 m$
10^4	10
10^6	20
10^9	30
10^{12}	40
10^{20}	66,5
10^{50}	166
10^{100}	332,2

Myślenie rekurencyjne – w sytuacjach życiowych



Taniec:

tańcz;

if nie gra muzyka then STOP
else

zrób krok;

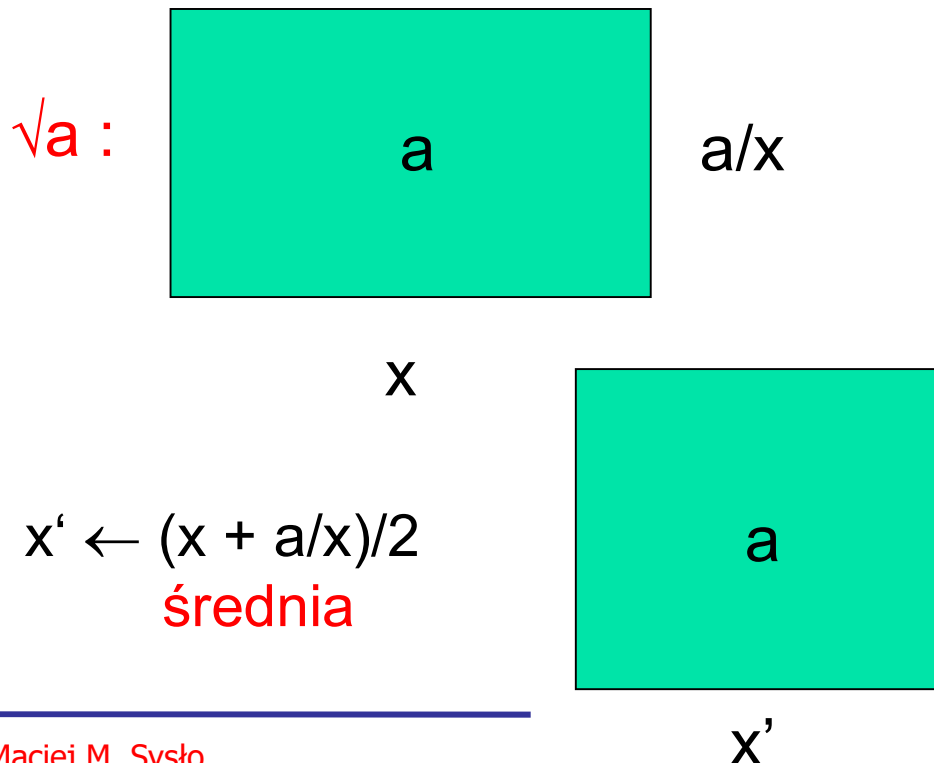
tańcz

Przybliżone rozwiązania – przykład

Obliczanie wartości pierwiastka kwadratowego z 2, czyli $\sqrt{2} = x$

- komputer nie zna takiej operacji.
- 2 nie jest dokładnie kwadratem żadnej liczby x .

Przybliżamy więc x (dla dowolnego a zamiast 2):



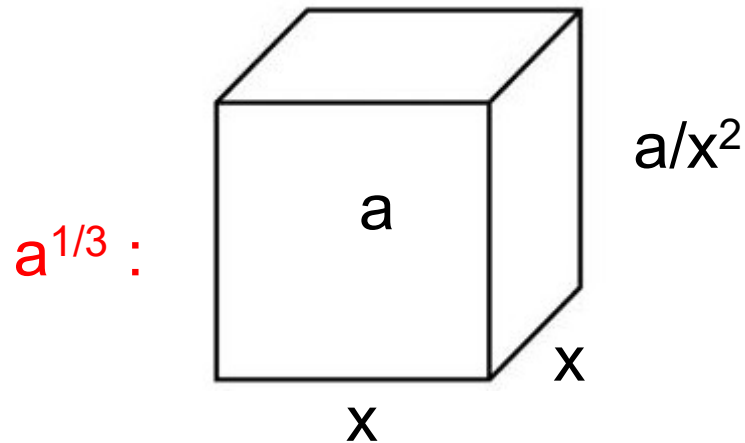
Rozumowanie – *mental tools*:

- abstrakcja
- reprezentacja – przybliżenie
- modelowanie geometryczne
- 3- i wyższe wymiary
- redukcja (do znanego)

Na matematyce, jest to czarna skrzynka.

Przybliżone rozwiązanie – uogólnienie

Dla $a > 0$, oblicz $a^{1/3} = x$, czyli $x^3 = a$



Ciekawostka – użycie **WTF**:

$$2^{1/3} = p/q$$

$$2 = p^3/q^3$$

$$2q^3 = p^3$$

$$q^3 + q^3 = p^3 \text{ ???}$$

$$x' \leftarrow (2x + a/x^2)/3$$

Można **uogólnić** dla: $a^{1/n} = x$, $x^n = a$

Metoda Newtona-Raphsona bez pochodnych

Podstawa programowa matematyki – NWD

Klasy IV – VI. Działania na liczbach naturalnych – jak uczeń znajduje NWD? :

- 3) mnoży i dzieli liczbę naturalną przez liczbę naturalną jednocyfrową, dwucyfrową lub trzycyfrową sposobem pisemnym, w pamięci (w najprostszych przykładach) i za pomocą kalkulatora (w trudniejszych przykładach);
- 4) wykonuje dzielenie z resztą liczb naturalnych;
- 9) rozkłada liczby dwucyfrowe na czynniki pierwsze;
- 13) znajduje największy wspólny dzielnik (NWD) w sytuacjach nie trudniejszych niż typu NWD(600, 72), NWD(140, 567), NWD(10000, 48), NWD(910, 2016) oraz wyznacza najmniejszą wspólną wielokrotność dwóch liczb naturalnych metodą rozkładu na czynniki;
- 16) rozkłada liczby naturalne na czynniki pierwsze, w przypadku gdy co najwyżej jeden z tych czynników jest liczbą większą niż 10;

W podstawie matematyki jest tylko kalkulator, **NIE MA KOMPUTERA.**

Ale to jest problem NP.-trudny

Ale, to nie kształci myślenia abstrakcyjnego

I miód na moje serce – Twierdzenie o ilorazie i reszcie:

- 17) wyznacza wynik dzielenia z resztą liczby a przez liczbę b i zapisuje liczbę a w postaci: $a = b \cdot q + r$.

**Pewien brak: $0 \leq r < b$,
ale krótka droga do algorytmu Euklidesa!**

Myślenie logarytmiczne

logarytm i algorytm
to **anagramy**



n	m	r_i
34	21	13
21	13	8
13	8	5
8	5	3
5	3	2
3	2	1
2	1	0

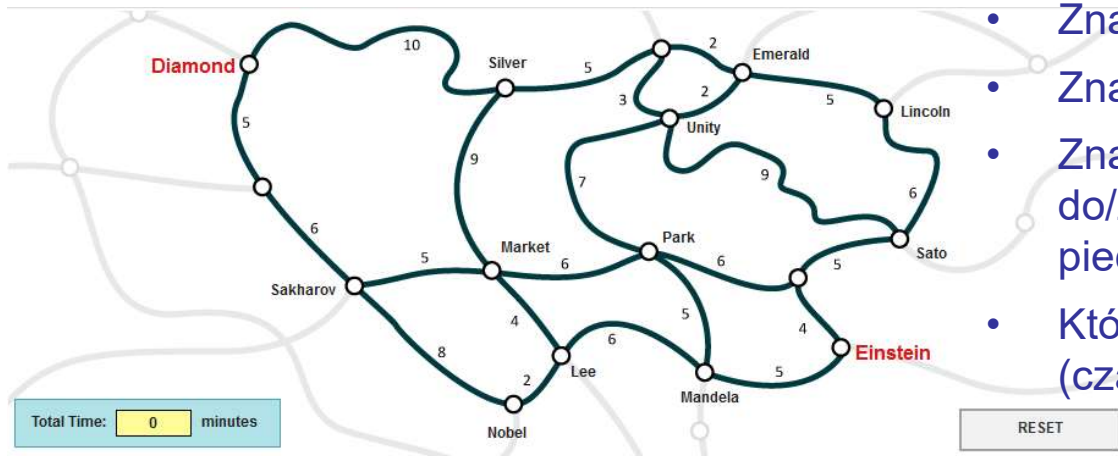
- Generowane liczby są połowione co druga
- A zatem, dla 10^{300} , algorytm Euklidesa wykonuje ok. **2000 mnożeń** – to chwila, chwilę czekamy na zaszyfrowany mail.
- Logarytm ukryty w algorytmach:
- **!!!!** Algorytmiczna **definicja logarytmu**: ile razy należy podzielić przez dwa liczbę i jej ilorazy, by osiągnąć 1 – można wprowadzić już w gimnazjum!
- Euklides mógł wynaleźć logarytm 300 lat p.n.e., a zrobił to dopiero John Napier 400 lat temu, w 1614 roku.

Geometria – a grafy?

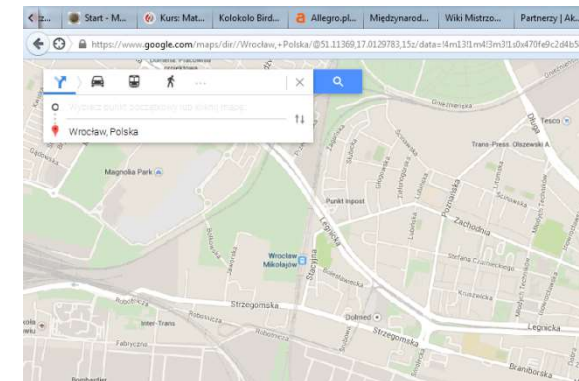
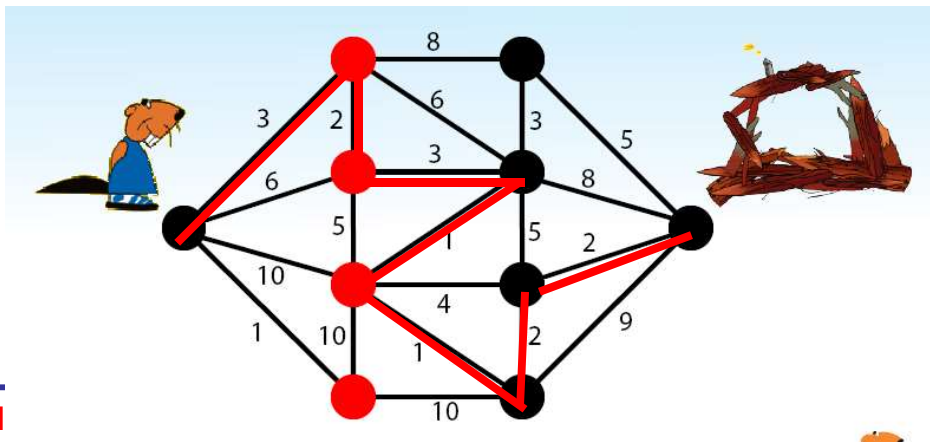
Dlaczego nasi uczniowie wypadli źle (29 miejsce na 32 kraje) w badaniach PISA w zakresie **rozwiązywania problemów**, w 2012-2013?

Testy: najkrótsze drogi

Zajęcia z realnej sytuacji – to uczniów motywuje



- Znajdź swój dom i szkołę na Google map
- Znajdź swoją drogę do/z szkoły
- Znajdź najkrótszą drogę (odległość i czas) do/z szkoły różnymi środkami transportu: na piechotę, na rowerze, samochodem, busem
- Która z tych dróg jest najkrótsza (czas/odległość)?



Myślenie – nie tylko informatyczne

Świetny przykład (A.B. Kwiatkowska): **próbujemy dopasować jedno do drugiego**, porównać zgodność jednego z drugim:

- DNA – na ile jest ono wspólne dla bliźniąt?
- DNA – czy zawiera pewne fragmenty związane z chorobami dziedzicznymi?
- W jakim stopniu pokrywają się prace – plagiat?
- W informatyce – jest to **dopasowanie wzorca**

Podsumowanie – myślenie:

- algorytmiczne (*algorithmic thinking*)
- rekurencyjne (*recursive thinking*)
- redukcyjne (*reductive thinking*)
- logarytmiczne (*logarithmic thinking*)
- projektowe (*design thinking*)
- ...
- **komputacyjne** (*computational thinking*)

Dziękuję Państwu za uwagę
i proszę nie zapomnieć:



<http://mmsyslo.pl>