Trudne wieloetapowe zadania na maturze z matematyki w roku 2018

Mieczysław Fałat
OKE we Wrocławiu

PODSTAWA PROGRAMOWA MATEMATYKI

Cele kształcenia – wymagania ogólne

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	
Uczeń interpretuje tekst matematyczny. Po rozwiązaniu zadania interpretuje otrzymany wynik.	Uczeń używa języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	
Uczeń używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.	Uczeń rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.
III. Modelowanie matematyczne.	
Uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.	Uczeń buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia.
IV. Użycie i tworzenie strategii.	
Uczeń stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.	Uczeń tworzy strategię rozwiązania problemu.
V. Rozumowanie i argumentacja.	
Uczeń prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.	Uczeń tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

Matura z matematyki, maj 2018

Poziom podstawowy - 34 zadania w arkuszu
(25 zadań zamkniętych, 9 zadań otwartych)
21 427 zdających po raz pierwszy,
średni wynik to 54% (w kraju 56%)

3232 osoby poprawiały, bądź podwyższały wynik

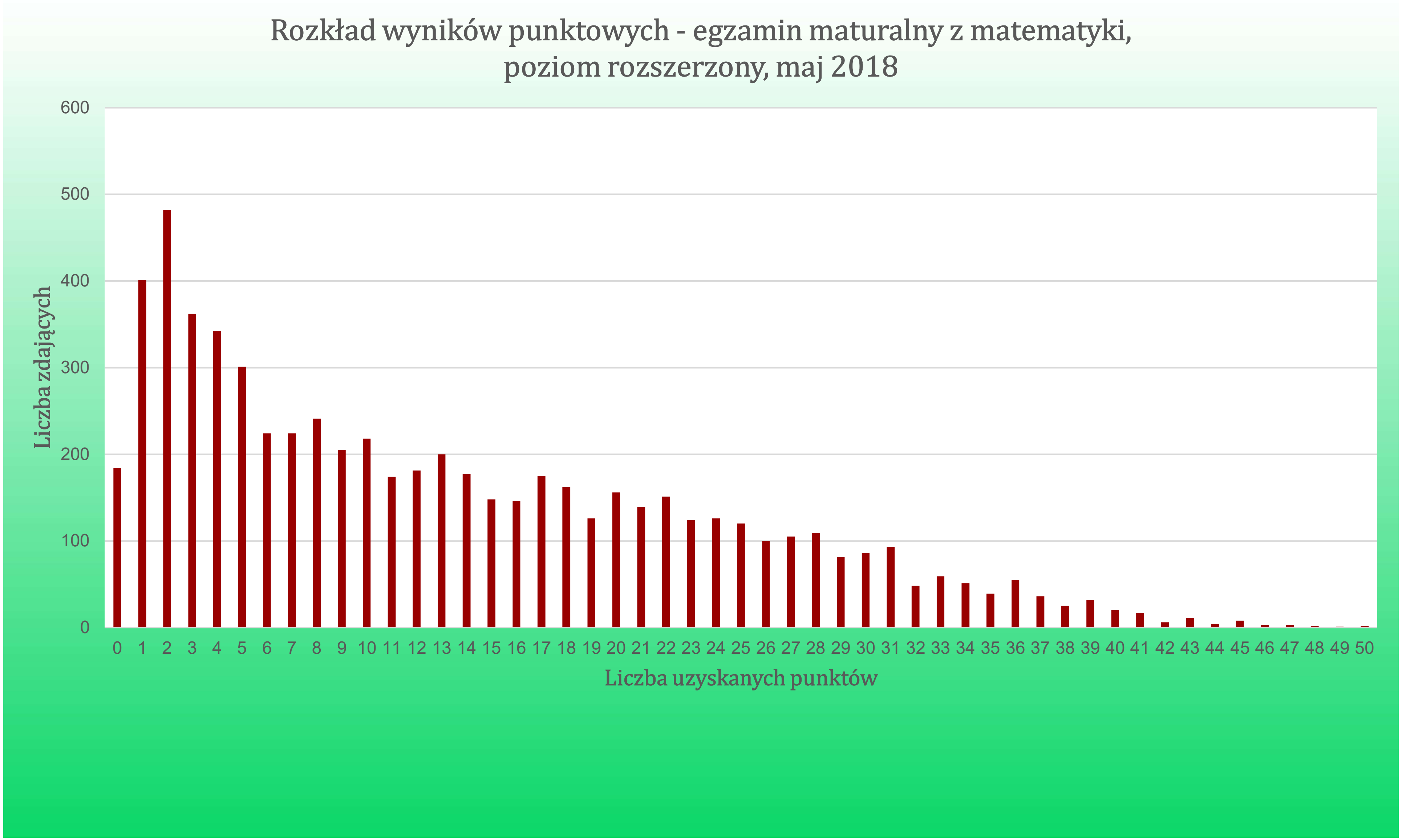
24 prace egzaminacyjne zostały unieważnione

Poziom rozszerzony - 15 zadań w arkuszu
(4 zadania zamknięte, 11 zadań otwartych)
6 119 zdających po raz pierwszy (28,6%),
średni wynik to 26,6% (w kraju 29%)

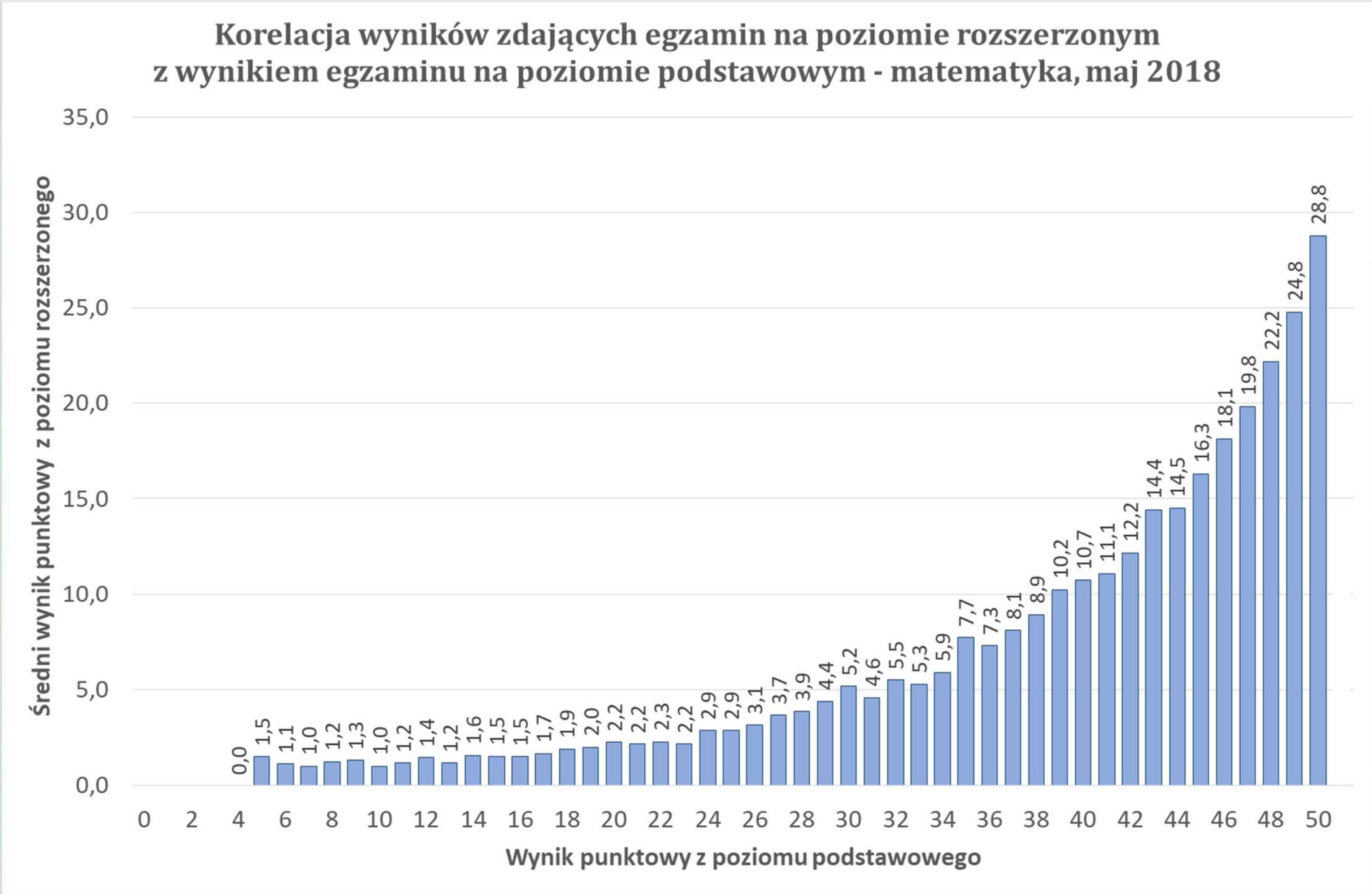
366 osób podwyższało wynik

Matura z matematyki, maj 2018 - poziom podstawowy

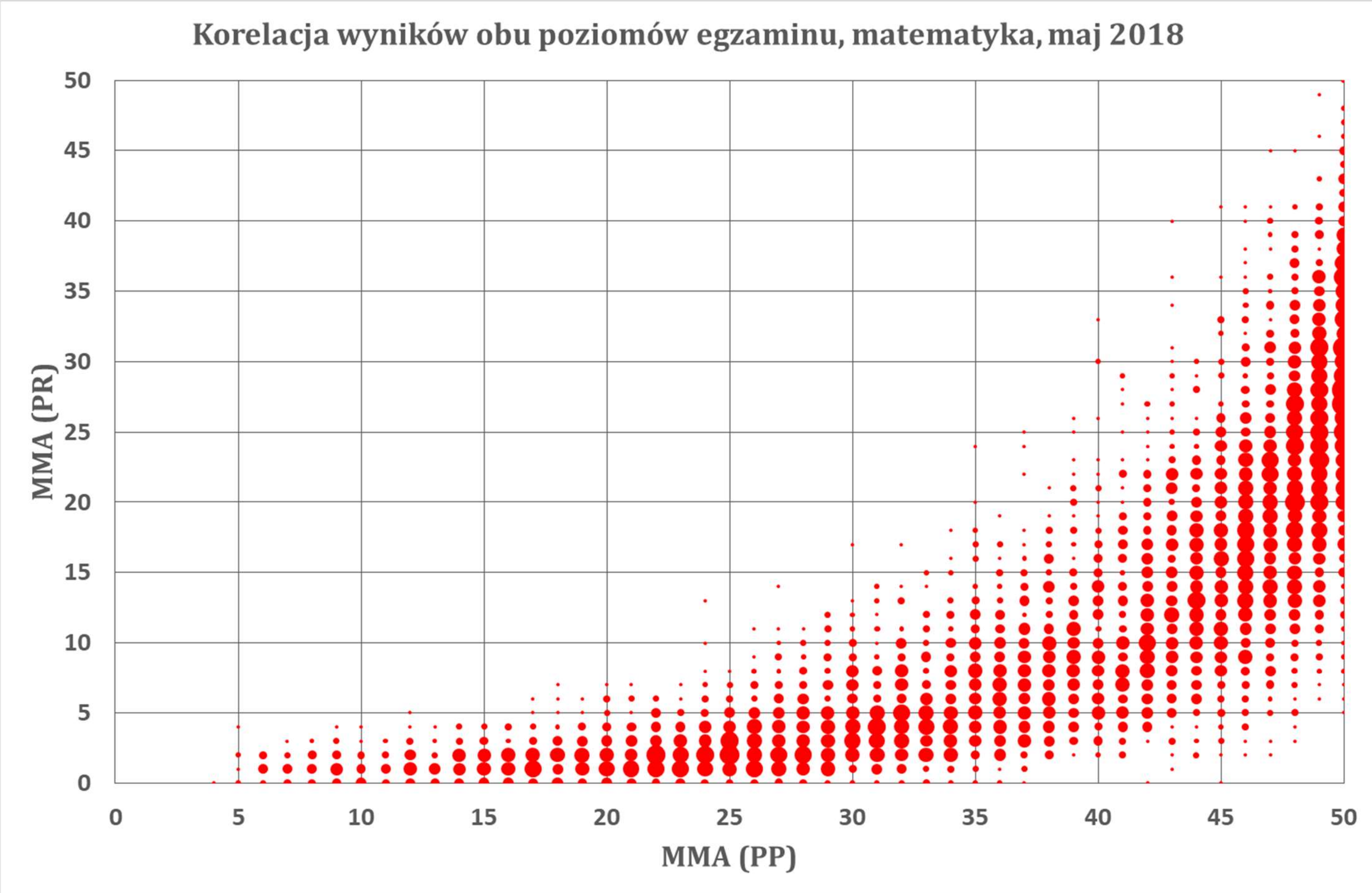
Matura z matematyki, maj 2018 - poziom rozszerzony



Korelacje wyników PP i PR, maj 2018



Korelacje wyników PP i PR (c.d.)



Opuszczenia zadań otwartych – matematyka – poziom podstawowy egzaminu, maj 2018 – wszyscy zdający (N = 24 659)

26.	27.	28.	29.	30.	31.	32.	33.	34.
925	1637	5204	10184	6899	2124	3223	4348	6361
3,8%	6,6%	21,1%	41,3%	28,0%	8,6%	13,1%	17,6%	25,8%

Opuszczenia zadań otwartych – matematyka – poziom rozszerzony egzaminu, maj 2018 – wszyscy zdający (N = 6 485)

5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
1348	1107	1699	1030	844	630	1121	965	626	1007	1733
20,8%	17,1%	26,2%	15,9%	13,0%	9,7%	17,3%	14,9%	9,7%	15,5%	26,7%

Zadanie nr 32 – (poziom podstawowy) – strategia na płaszczyźnie kartezjańskiej

Zadanie 32. (0–5)

W układzie współrzędnych punkty $A=(4,3)$ i $B=(10,5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y=2x+3$. Oblicz współrzędne punktu C, dla którego kąt ABC jest prosty.

0	64,6%
1	9,1%
2	4,1%
3	1,3%
4	3,2%
5	17,7%

Wskaźnik łatwości zadania = 0,24
13,1% opuszczeń
(dane dla wszystkich zdających)

Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej, maj 2018

Zadanie 18. (0–1)

Punkt $K=(2,2)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego KLM, w którym $|KM|=|LM|$. Odcinek MN jest wysokością trójkąta i $N=(4,3)$. Zatem

A. $L=(5,3)$ **B.** $L=(6,4)$ **C.** $L=(3,5)$ **D.** $L=(4,6)$

0,61 (dol); 0,62(op)

Zadanie 19. (0–1)

Proste o równaniach $y=(m+2)x+3$ oraz $y=(2m-1)x-3$ są równoległe, gdy

A. $m=2$ **B.** $m=3$ **C.** $m=0$ **D.** $m=1$

0,81 (dol); 0,81 (op)

Zadanie 32. (0–5)

W układzie współrzędnych punkty $A=(4,3)$ i $B=(10,5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y=2x+3$. Oblicz współrzędne punktu C, dla którego kąt ABC jest prosty.

0,28 (dol); 0,27 (op)

Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej, maj 2017

Zadanie 19. (0–1)

Na płaszczyźnie z układem współrzędnych proste k i l przecinają się pod kątem prostym w punkcie $A=(-2,4)$. Prosta k jest określona równaniem $y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}$. Zatem prostą l opisuje równanie

A. $y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}$ **B.** $y=-\frac{1}{4}x-\frac{7}{2}$ **C.** $y=4x-12$ **D.** $y=4x+12$

0,61 (dol); 0,62 (op)

Zadanie 20. (0–1)

Dany jest okrąg o środku $S=(2,3)$ i promieniu $r=5$. Który z podanych punktów leży na tym okręgu?

A. $A=(-1,7)$ **B.** $B=(2,-3)$ **C.** $C=(3,2)$ **D.** $D=(5,3)$

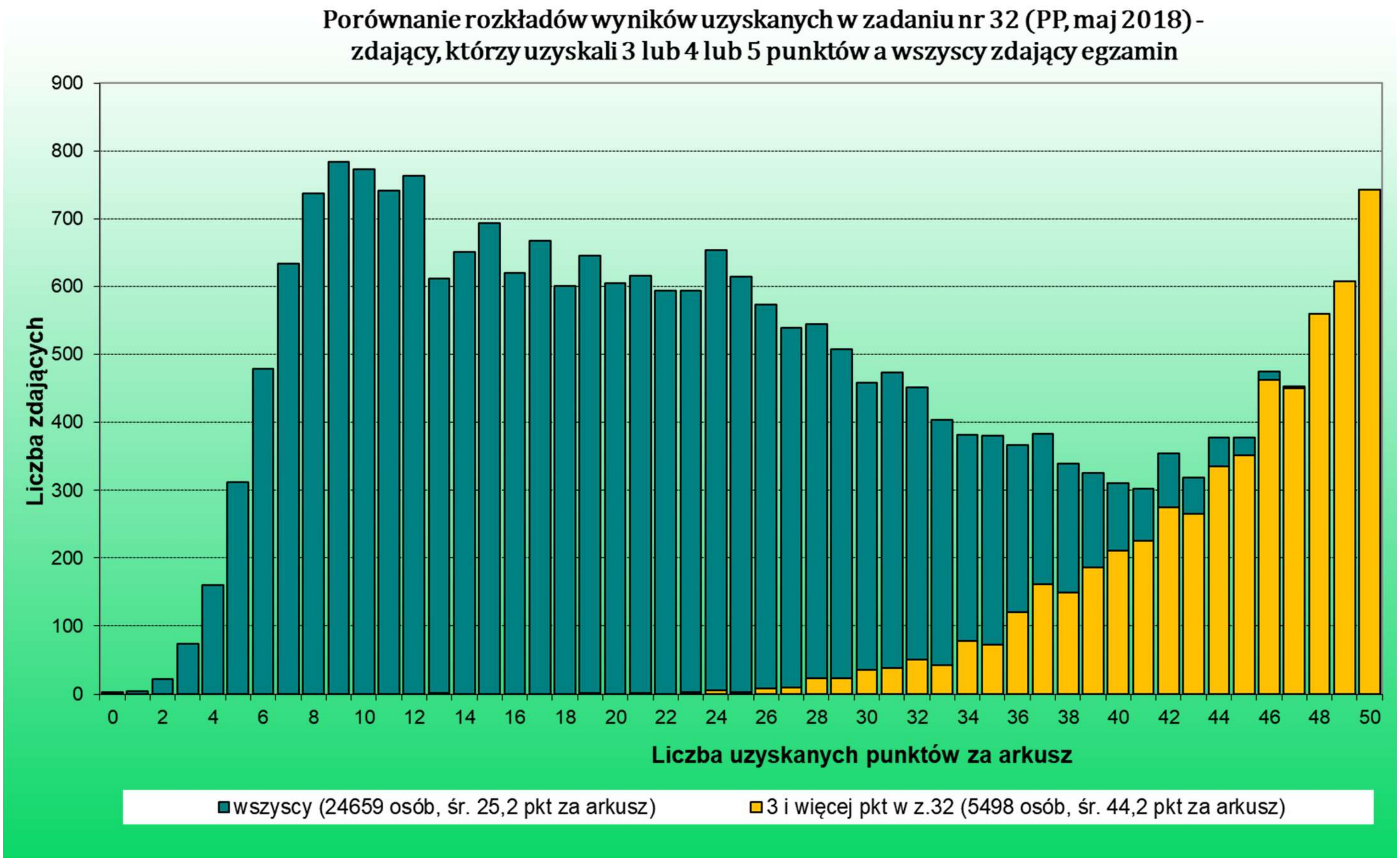
0,63 (dol); 0,66 (op)

Zadanie 32. (0–5)

Dane są punkty $A=(-4,0)$ i $M=(2,9)$ oraz prosta k o równaniu $y=-2x+10$. Wierzchołek B trójkąta ABC to punkt przecięcia prostej k z osią Ox układu współrzędnych, a wierzchołek C jest punktem przecięcia prostej k z prostą AM. Oblicz pole trójkąta ABC.

0,27 (dol); 0,26 (op)

Zadanie nr 32 – korelacja „dobrych wyników” z wynikami wszystkich zdających



Najczęstsze kłopoty zdających w zadaniu nr 32

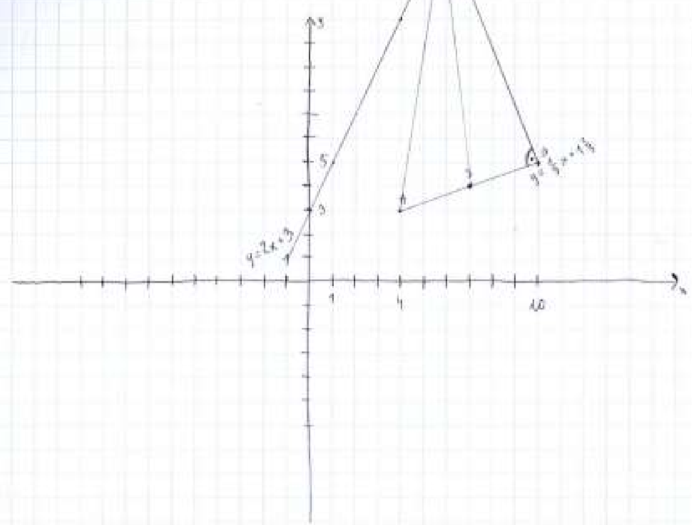
- Poprawna interpretacja treści tego zadania, w szczególności: (…) kąt ABC jest prosty.
- Brak planu rozwiązania (szkicu planu).
- Zaprzestawanie rozwiązywania zadania po wykonaniu jednego, dwóch etapów.
- Stosowanie równania prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A=(x_A, y_A)$ $B=(x_B, y_B)$:
$$(y-y_A)(x_B-x_A)-(y_B-y_A)(x-x_A)=0$$
- Posługiwanie się zapisem $C=(x,\ 2x+3)$.
- Ocena realności otrzymanego rozwiązania.

Dlaczego zabrakło dalszego ciągu rozwiązania?

(15/25 p)

Zadanie 32. (0–5)

W układzie współrzędnych punkty $A=(4,3)$ i $B=(10,5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y=2x+3$. Oblicz współrzędne punktu C, dla którego kąt ABC jest prosty.



$y = 2x+3$

$a=2 \quad b=3$

x	4	6	8	10	0	1	2	3
y	11	15	19	23	3	5	7	9

$S_{AB} = \left(\frac{4+10}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$

$S_{AB} = (7, 4)$

$y = ax+b$

$\begin{cases} 3 = 4a+b & /\cdot(-1) \\ 5 = 10a+b \end{cases}$

$\begin{cases} -3 = -4a-b \\ 5 = 10a+b \end{cases}$

$2 = 6a$

$a = \frac{1}{3}$

$b = 3 - 4\cdot\frac{1}{3}$

$b = 3-\frac{4}{3}$

$b = 1\frac{2}{3}$

~~prosta~~ $|AB| = \frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}$

Odpowiedź: ....

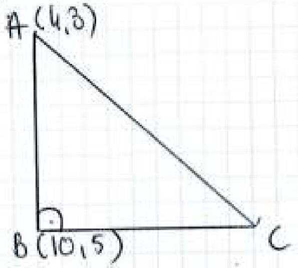
Wypełnia egzaminator	Nr zadania	32.
	Maks. liczba pkt	5
	Uzyskana liczba pkt	1

Podobna sytuacja ...

(19/25p)

Zadanie 32. (0–5)

W układzie współrzędnych punkty $A=(4,3)$ i $B=(10,5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y=2x+3$. Oblicz współrzędne punktu C, dla którego kąt ABC jest prosty.



$y = ax + b$

prosta $|AB|$: $\begin{cases} 3 = 4a + b \\ 5 = 10a + b \end{cases}$

$\begin{cases} b = 3 - 4a \\ 5 = 10a + 3 - 4a \end{cases}$

$\begin{cases} 2 = 6a \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} b = 3 - 4 \cdot \frac{1}{3} \\ b = \frac{5}{3} \end{cases}$

$y = \frac{1}{3}a + \frac{5}{3}$ – prosta $|AB|$

żeby $|AB|$ była prostopadła do $|BC|$ iloczyn współczynników kierunkowych musi wynosić $\underline{-1}$

$\frac{1}{3} \cdot x = -1$

$\underline{x = -3}$ – współczynnik kierunkowy prostej $|BC|$

$5 = -3 \cdot 10 + b$; równanie prostej dla $|BC|$

$5 = -30 + b$; $y = -3x + 35$

$35 = b$

Odpowiedź: ....

Prosta prostopadła do prostej o równaniu $y = 2x + 3$

(20/25 p)

Zadanie 32. (0–5)

W układzie współrzędnych punkty $A = (4,3)$ i $B = (10,5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = 2x + 3$. Oblicz współrzędne punktu C, dla którego kąt ABC jest prosty.

równanie prostej, na której leżą punkty A i B

$(y-3)(10-4)-(5-3)(x-4)=0$

$(y-3)(6)-(2)(x-4)=0$

$(6y-18)-(2x-8)=0$

$6y-18-2x+8=0$

$-2x+6y-10=0$

$x-3y+5=0$

$-3y=-x-5$

$y=\frac{x}{3}+\frac{5}{3}$

$y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

~~$6y=10+2x$~~

~~$y=\frac{10}{6}+\frac{2x}{6}$~~

~~$y=\frac{5}{3}+\frac{x}{3}$~~

~~$y=\frac{5+x}{3}$~~

|AB| do |BC| ⇒ są prostopadłe, bo kąt prosty między nimi

~~$2x \cdot 2$~~ ~~y~~ ~~$\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$~~

~~$2 \cdot x = -1$~~

~~$x = -2$~~

~~$y = -2x + b$~~

~~$5 = -20 + b$~~

~~$25 = b$~~

~~$y = -2x + 25$~~

~~$-2x+25 = 2x+3$~~

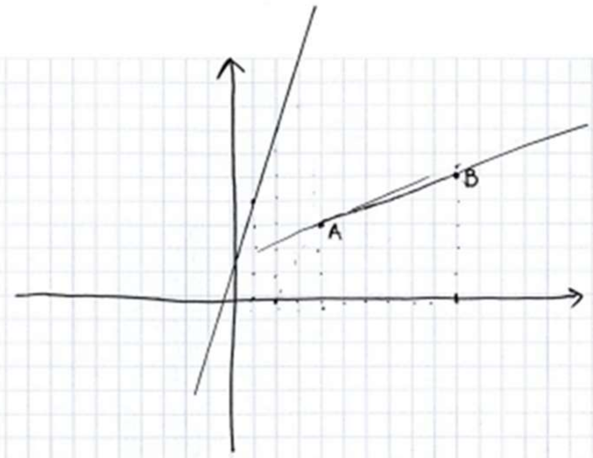
~~$21 = 4x$~~

~~$\frac{21}{4} = x$~~

$2 \cdot a_1 = -1$

$a_1 = -\frac{1}{2}$

współczynnik prostej, na której leży |BC|



$y=-\frac{1}{2}(x-10)+5$

$y=-\frac{1}{2}x+5+5$

$y=-\frac{1}{2}x+10$

$2x+3=-\frac{1}{2}x+10$

$2\frac{1}{2}x=7$

$\frac{5}{2}x=7$

$5x=14$

$x=\frac{14}{5}=2\frac{4}{5}$

$y=2\cdot\frac{14}{5}+3$

$y=\frac{28}{5}+\frac{3}{1}$

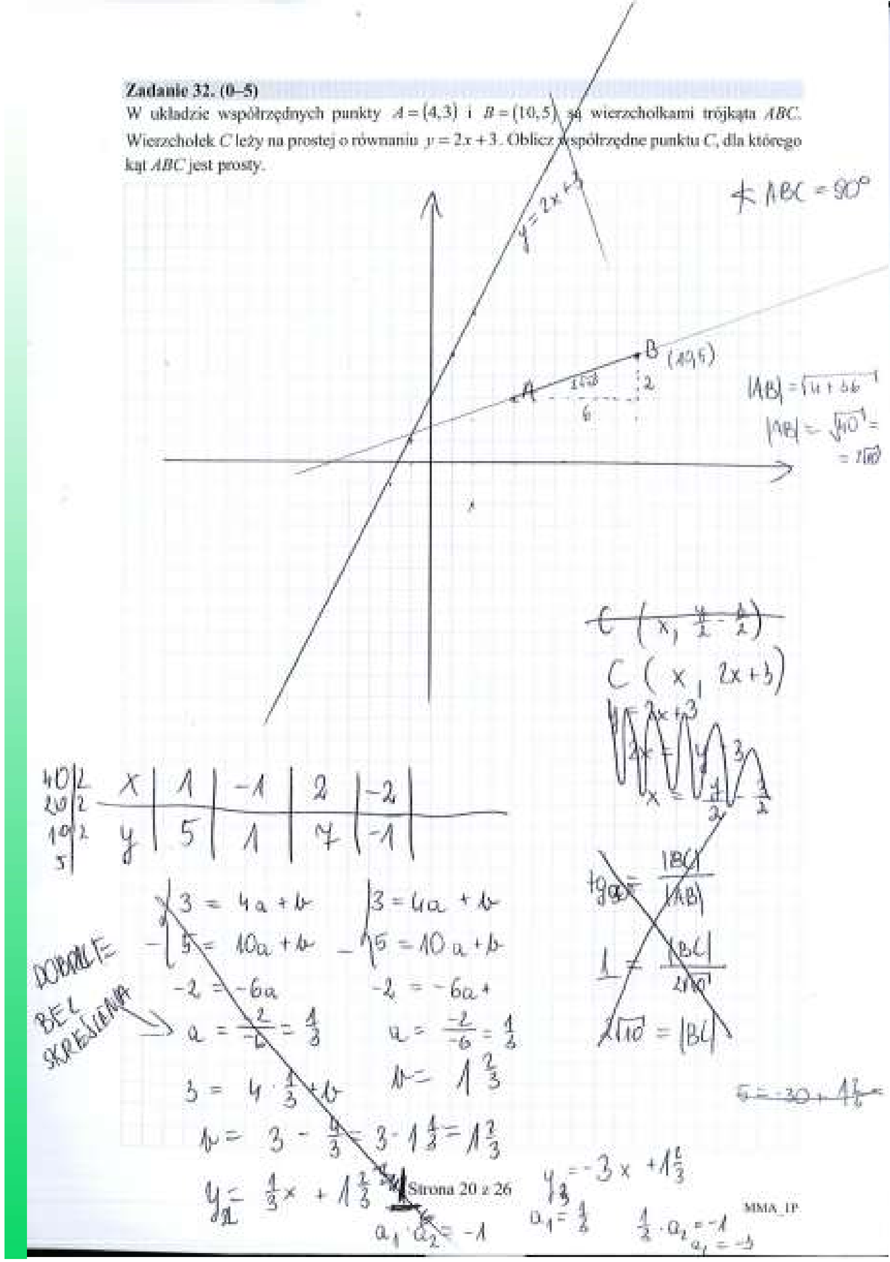
$y=\frac{28}{5}+\frac{15}{5}$

$y=\frac{43}{5}=8\frac{3}{5}$

Odpowiedź: $C=(2\frac{4}{5};8\frac{3}{5})$

Którego punktu szukamy?

(14/25p)



Zadanie 32. (0–5)

W układzie współrzędnych punkty $A=(4,3)$ i $B=(10,5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y=2x+3$. Oblicz współrzędne punktu C, dla którego kąt ABC jest prosty.

$\sphericalangle ABC = 90°$

$|AB| = \sqrt{4+36}$

$|AB| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$C(x, 2x+3)$

x	1	-1	2	-2
y	5	1	7	-1

$3 = 4a + b$

$5 = 10a + b$

$-2 = -6a$

$a = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$

$b = 1\frac{2}{3}$

DOBRZE BEZ SKREŚLENIA

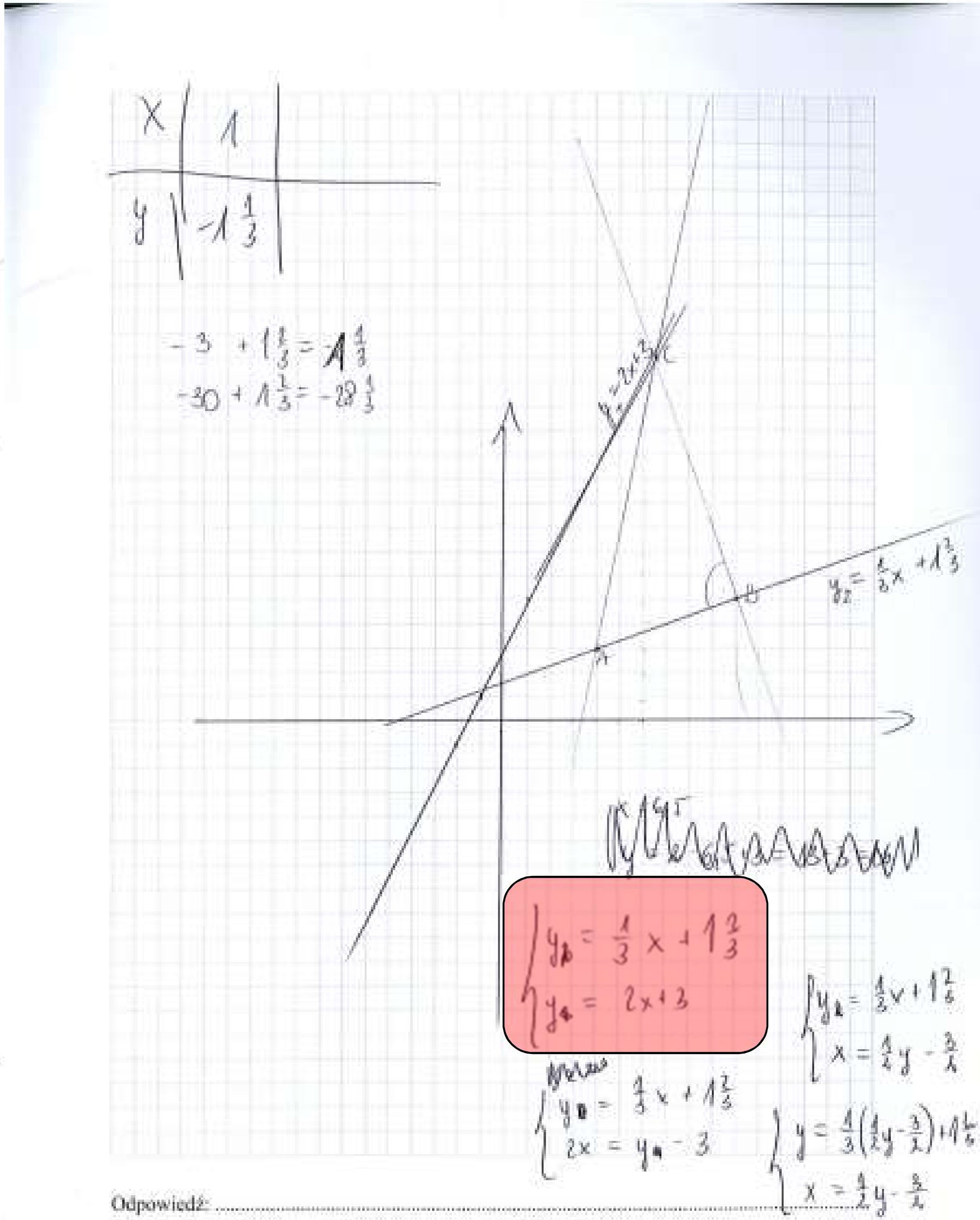
$y_1 = \frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}$

$a_1 \cdot a_2 = -1$

$y_2 = -3x + 1\frac{2}{3}$

Strona 20 z 26

MMA_1P



X	1
y	$-1\frac{1}{3}$

$-3 + 1\frac{2}{3} = -1\frac{1}{3}$

$-30 + 1\frac{1}{3} = -28\frac{1}{3}$

$y_2 = \frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}$

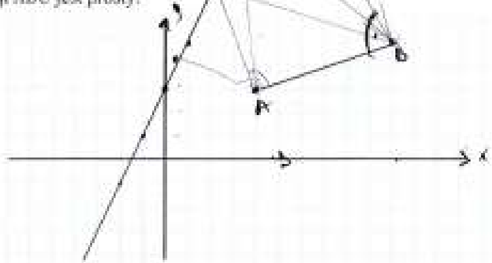
$$\begin{cases} y_a = \frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3} \\ y_a = 2x + 3 \end{cases}$$

Odpowiedź: ....

Zabrakło refleksji ...

(16/25p)

Zadanie 32. (0–5)
W układzie współrzędnych punkty $A = (4,3)$ i $B = (10,5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = 2x + 3$. Oblicz współrzędne punktu C, dla którego kąt ABC jest prosty.



$|AB|: (y-3)(10-4)-(5-4)(x-4)=0$

$6y-18-(x-4)=0$

$6y+x-14=0$

$\boxed{y=-\frac{1}{6}x+\frac{14}{6}}$

$1°\ |\sphericalangle CAB|=90°$

$CA \perp AB$

$C(x_c, 2x_c+3)\quad A(4,3)$

$|CA|: (y-3)(x_c-4)-(2x_c \ldots)(x-4)=0$

$(yx_c-4y-3x_c+12)-(2x_cx-8x_c)=0$

$yx_c-4y-3x_c+12-2x_cx+8x_c=0$

$y(x_c-4)-2x(x_c)+5x_c=0$

$-2x_c\cdot 1=-1$

$x_c=\frac{1}{2}$

$C(\frac{1}{2}; 4)$

$2°\ |\sphericalangle ABC|=90°$

$CB \perp AB$

$C(x_c; 2x_c+3)\quad B(10,5)$

$|CB|: (y-2x_c+3)(10-x_c)-(5-2x_c+3)(x-x_c)=0$

$10y-yx_c-20x_c+4x_c^2+30-3x_c-(5x-5x_c-2xx_c+2x_c^2-3x_c)=0$

$10y-yx_c-20x_c+4x_c^2+30-3x_3-5x+5x_c+4xx_c-2x_c^2+3x_c=0$

$x(-5+4x_c)$

$-5+4x_c\cdot 1=-1$

$4x_c=4$

$x_c=1$

$C(1,$

$y(10-x_c)+x(-5+4x_c)+\ldots=0$

$y=-\frac{x(-5+4x_c)}{10-x_c}+\ldots$

$\frac{5-4x_c}{10-x_c}\cdot -\frac{1}{6}=-1$

$-\frac{5-4x_c}{60-6x_c}=-1$

$5-4x_c=60-6x_c$

$2x_c=55$

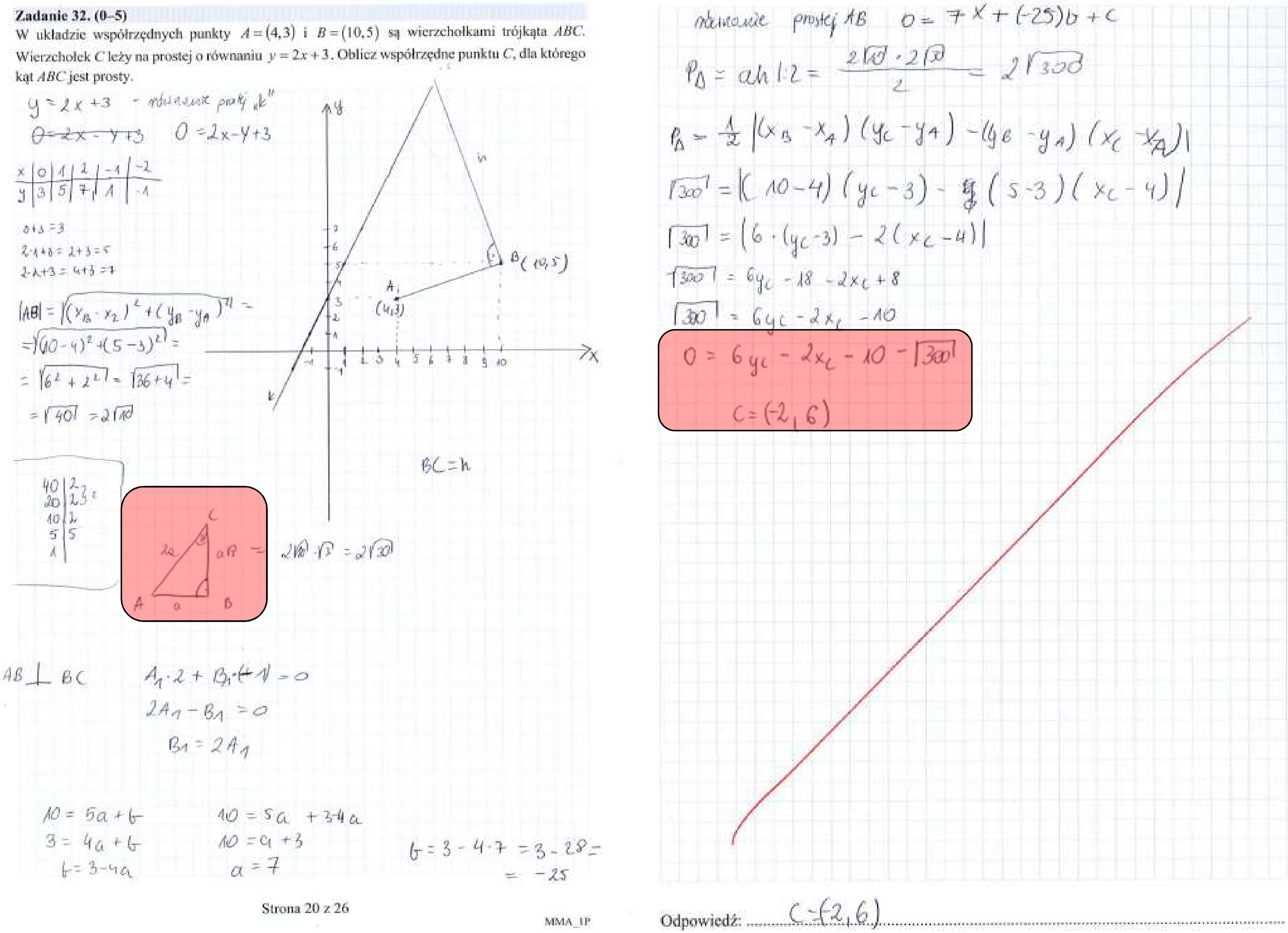
$x_c=27,5\qquad y=58$

$C(27,5; 58)$

Odpowiedź: $\boxed{C(27,5; 58)}$

Dodatkowy warunek i zaskakująca interpretacja

(15/25p)



Zadanie 32. (0–5)

W układzie współrzędnych punkty $A=(4,3)$ i $B=(10,5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y=2x+3$. Oblicz współrzędne punktu C, dla którego kąt ABC jest prosty.

$y=2x+3$ – równanie prostej „k"

$\cancel{0=2x-y+3}$ $\quad 0=2x-y+3$

x	0	1	2	-1	-2
y	3	5	7	1	-1

$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=$

$=\sqrt{(10-4)^2+(5-3)^2}=$

$=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{36+4}=$

$=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$BC=h$

$2\sqrt{10}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{30}$

$AB\perp BC$ $\quad A_1\cdot 2+B_1\cdot(-1)=0$

$2A_1-B_1=0$

$B_1=2A_1$

$10=5a+b$ $\quad 10=5a+3-4a$

$3=4a+b$ $\quad 10=a+3$

$b=3-4a$ $\quad a=7$

$b=3-4\cdot 7=3-28=-25$

Strona 20 z 26

MMA_1P

równanie prostej AB $\quad 0=7x+(-25)b+c$

$P_\Delta=ah:2=\frac{2\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{30}}{2}=2\sqrt{300}$

$P_\Delta=\frac{1}{2}|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(y_B-y_A)(x_C-x_A)|$

$\sqrt{300}=|(10-4)(y_C-3)-(5-3)(x_C-4)|$

$\sqrt{300}=|6\cdot(y_C-3)-2(x_C-4)|$

$\sqrt{300}=6y_C-18-2x_C+8$

$\sqrt{300}=6y_C-2x_C-10$

$\boxed{0=6y_C-2x_C-10-\sqrt{300}}$

$C=(-2,6)$

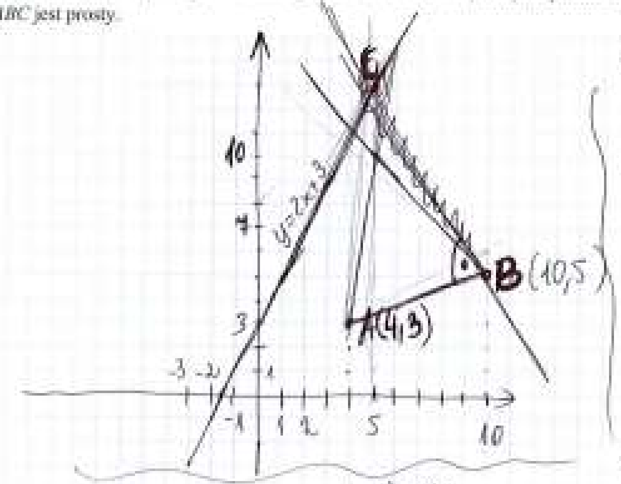
Odpowiedź: $C=(-2,6)$

Wątpliwości co do położenia punktu C

(18/25p)

Zadanie 32. (0–5)

W układzie współrzędnych punkty $A=(4,3)$ i $B=(10,5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y=2x+3$. Oblicz współrzędne punktu C, dla którego kąt ABC jest prosty.



Wyznaczam prostą AB

$a_{AB} = \frac{5-3}{10-4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$y = \frac{1}{3}x + b$

wstawiam punkt A(4,3)

$3 = \frac{1}{3}\cdot 4 + b$

$3 = \frac{4}{3} + b$

$\frac{9}{3} - \frac{4}{3} = b$

$\frac{5}{3} = b$

prosta AB ma równanie: $\boxed{y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}}$

(bo $\measuredangle ABC = 90°$) prosta BC jest $\perp$ do pr. AB, zatem będzie miała równanie

$y = -3x + b$

wstawiam B(10,5)

$5 = -3\cdot 10 + b$

$5 = -30 + b \to 35 = b$

pr. BC ma równanie $\boxed{y = -3x + 35}$

punkt C, to punkt przecięcia pr. AB z pr. BC!

$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} & /\cdot 9 \\ y = -3x + 35 \end{cases} \to \begin{cases} 9y = 3x + 15 \\ y = -3x + 35 \end{cases}$

$10y = 50$

$y = 5$

$5 = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

$\frac{15}{3} - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}x \to \frac{10}{3} = \frac{1}{3}x$

$10 = x$

~~B punkt (10; 5)~~

punkt C – przecięcie się pr. AB z pr $y=2x+3$

$\begin{cases} y = 2x + 3 & /\cdot \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} & /\cdot(-6) \end{cases} \to \begin{cases} y = 2x + 3 \\ -6y = -2x - 10 \end{cases}$

$-5y = -7$

$\boxed{y_C = \frac{7}{5}}$

$\frac{7}{5} = 2x + 3$

$\frac{7}{5} - \frac{15}{5} = 2x$

$-\frac{8}{5} = 2x$

$-\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{2} = x_C \to x_C = -\frac{8}{10} = \boxed{-\frac{4}{5}}$

$C\left(-\frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right)$

przec. C BC z $y=2x+3$

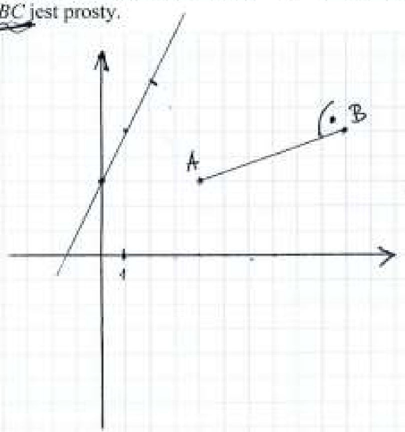
Odpowiedź: ....

Błąd rachunkowy, raczej nie do zweryfikowania …

(23/25p)

Zadanie 32. (0–5)

W układzie współrzędnych punkty $A=(4,3)$ i $B=(10,5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y=2x+3$. Oblicz współrzędne punktu C, dla którego kąt ABC jest prosty.



$y=2x+3$

~~$\sphericalangle CAB = 90°$~~ $\quad C(x_c, y_c) \quad y_c = 2x_c+3$

~~$|AC|^2 + |AB|^2 = |CB|^2$~~ ← Pitagoras

$(5-y_c)^2 = (5-(2x_c+3))^2 = (5-2x_c-3)^2 = (2-2x_c)^2$

~~$\left(\sqrt{(x_c-4)^2+(y_c-3)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(10-4)^2+(5-3)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(10-x_c)^2+(5-y_c)^2}\right)^2$~~

~~$x_c^2-8x_c+16+4x_c^2+36+4 = 100-20x_c+x_c^2+4-8x_c+4x_c^2$~~

~~$5x_c^2-8x_c+56 = 5x_c^2-28x_c+96 \quad / -5x_c^2;\ +28x_c;\ -56$~~

~~$20x_c = 40$~~

~~$x_c = 2$~~

~~$y_c = 2\cdot 2+3 = 7$~~

~~$C(2,7)$~~

$\sphericalangle ABC = 90°$

$C(x_c, y_c) \quad y_c = 2x_c+3$

$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$

$\left(\sqrt{(10-4)^2+(5-3)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(10-x_c)^2+(5-y_c)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x_c-4)^2+(y_c-3)^2}\right)^2$

$36+4+100-20x_c+x_c^2 \boxed{-4} -8x_c+4x_c^2 = x_c^2-8x_c+16+4x_c^2$

$5x_c^2-28x_c+136 = 5x_c^2-8x_c+16$

$120 = 20x_c$

$6 = x_c$

$y_c = 2\cdot 6+3 = 12+3 = 15$

$C(6,15)$

Odpowiedź: ~~$C(2,7)$~~ $C(6,15)$

POZIOM ROZSZERZONY

Zadanie nr 14 – strategia na płaszczyźnie kartezjańskiej

Zadanie 14. (0–6)

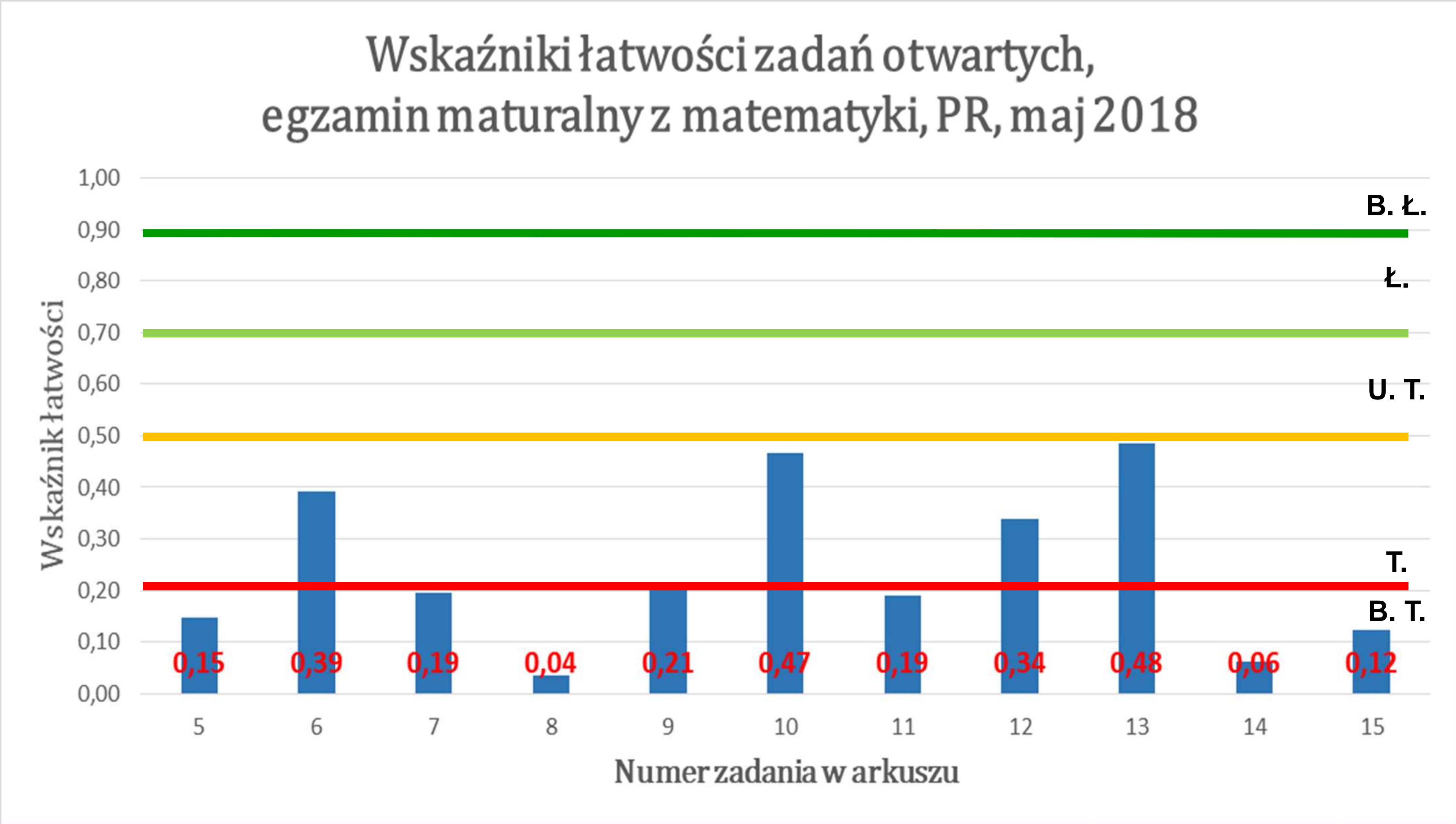
Punkt $A=(7,-1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Obie współrzędne wierzchołka C są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2+y^2=10$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.

0	81,5%
1	8,4%
2	4,8%
3	2,2%
4	1,3%
5	0,6%
6	0,6%

Wskaźnik łatwości zadania = 0,06 (w kraju 0,07)

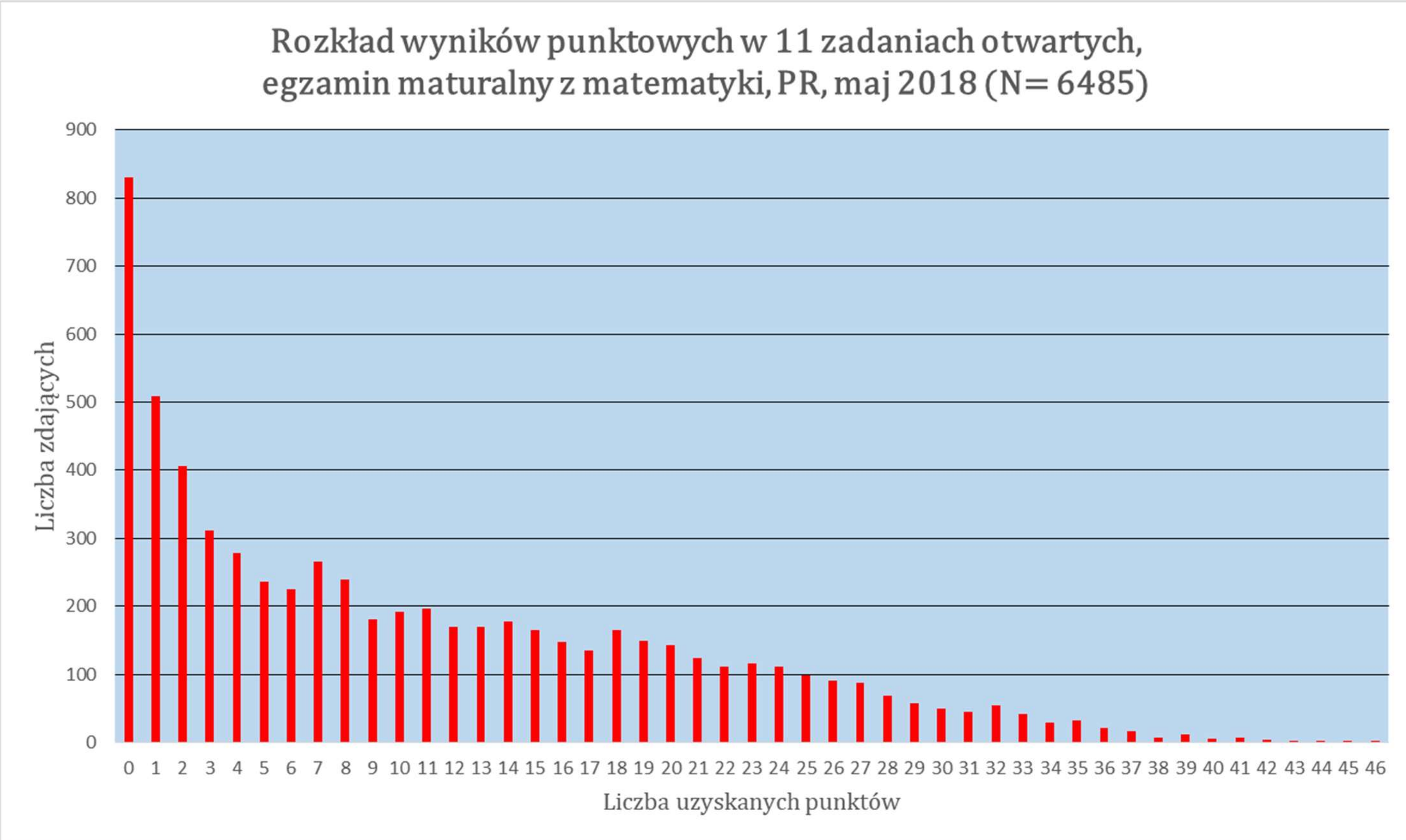
15,5% opuszczeń

Zadania otwarte, poziom rozszerzony, maj 2018

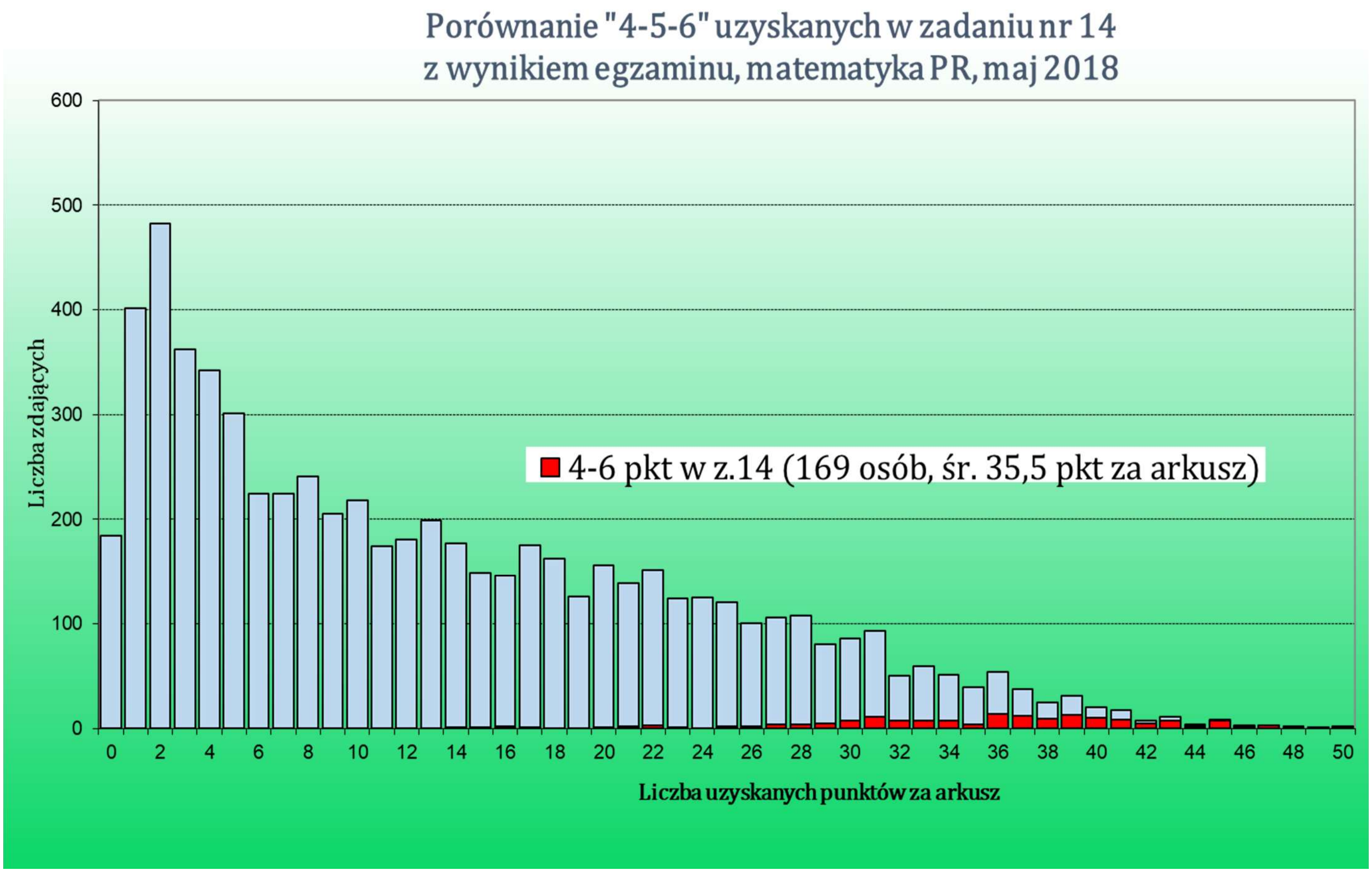


KRAJ	0,18	0,42	0,22	0,04	0,23	0,48	0,21	0,37	0,51	0,07	0,14

Rozkład wyników punktowych w zadaniach otwartych, maj 2018 - poziom rozszerzony



Zadanie nr 14 – korelacja „dobrych wyników” z wynikami wszystkich zdających



Najczęstsze kłopoty zdających w zadaniu nr 14

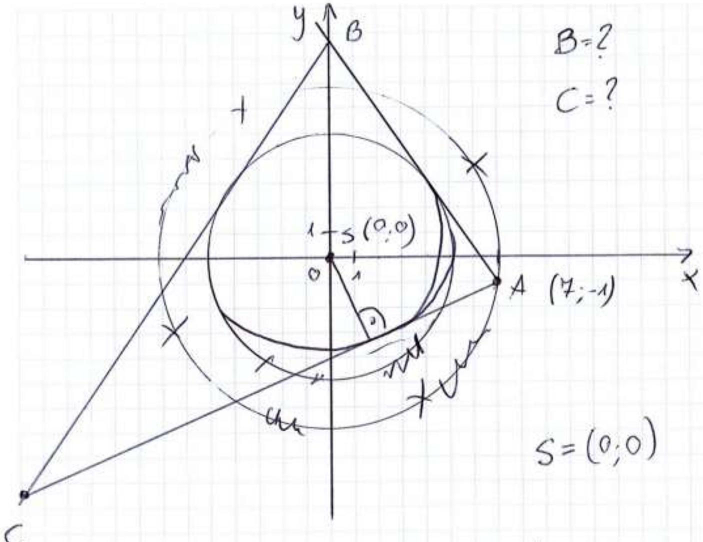
- Wybór sposobu rozwiązania.
- Poprawna interpretacja treści zadania.
- Stosowanie wzoru na odległość punktu od prostej. oraz interpretowanie otrzymanych stąd wyników.
- Poprawna interpretacja otrzymanych rezultatów cząstkowych rozwiązania.
- Biegłość obliczeniowa.

(30/46p)

Wybór sposobu rozwiązania

Zadanie 14. (0–6)

Punkt $A=(7,-1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Obie współrzędne wierzchołka C są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2+y^2=10$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.



$B=?$

$C=?$

$S=(0;0)$

$|AC|=|BC|$

$\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=0$

$\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=0$

PR AC

$\begin{cases} -1=7a+b \\ y_c=x_c a+b \end{cases}$

$-y_c-1=7a-x_c a$

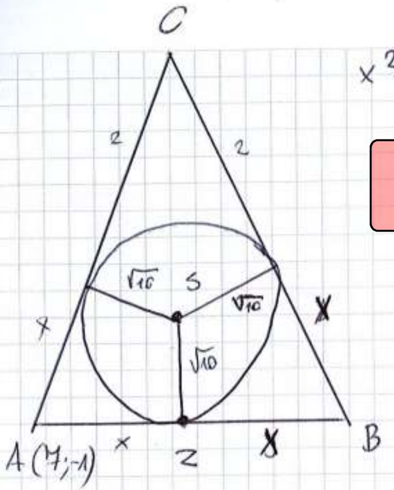
$-y_c-1=a(7-x_c)$

$a=\frac{-y-1}{7-x_c}$

Odległość punktu S od prostej AC

$\sqrt{10}=\frac{|A\cdot 0+B\cdot 0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$\sqrt{10}=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$



$x^2+y^2=10$ $S=(0;0)$

$P_{AZS}=\frac{\sqrt{40}\cdot\sqrt{10}}{2}=10$

$P_{AZS}=\frac{1}{2}|(0-7)(y_z+1)-(0+1)(x_z-7)|$

$(\sqrt{50})^2-(\sqrt{10})^2=x^2$

$40=x^2$

$\sqrt{40}=x$

$20=|-7y_z-7-x_z+7|$

$20=|-x_z-7y_z|$

$20=-x_z-7y_z \lor 20=x_z+7y_z$

$x_z=-7y_z-20 \lor 20-7y_z=x_z$

$|AS|=\sqrt{7^2+1^2}$

$|AS|=\sqrt{50}$

$|AB|=4\sqrt{10}$

$|SZ|=\sqrt{(-7y_z-20)^2+(y_z)^2}$ $\lor$ $|SZ|=\sqrt{(20-7y_z)^2+(y_z)^2}$

$10=49y_z^2+280y_z+400+y_z^2$

$0=5y_z^2+28y_z+40$

$\Delta=784$

$10=400-280y_z+49y_z^2+y_z^2$

$0=5y_c-28y_z+20$

Odpowiedź: ....

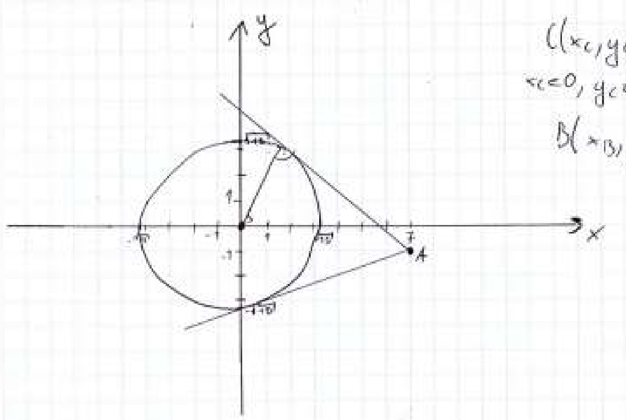
Wypełnia	Nr zadania	14.
	Maks. liczba pkt	6

Zła interpretacja treści zadania

(29/46p)

Zadanie 14. (0–6)

Punkt $A=(7,-1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Obie współrzędne wierzchołka C są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2+y^2=10$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.



$C(x_C, y_C)$

$x_C<0,\ y_C<0$

$B(x_B, y_B)$

Niech bok AB tego trójkąta zawiera się w prostej $k: y_1=a_1x+b_1$; bok AC w prostej $l: y_2=a_2x+b_2$, a bok BC w prostej $m: y_3=a_3x+b_3$

~~Odległość środka okręgu jest taka sama do prostych i wynosi $\sqrt{10}$.~~

Wysokość tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka A na bok BC ~~prostopadle~~ dzieli ten bok na dwie równe części. Powiedzmy, że wysokość ta pada na punkt D, wówczas $D\left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}\right)$. Przechodzi ona równocześnie przez środek okręgu wpisanego w ten trójkąt. Niech zawiera się ona w prostej n, wówczas ~~g~~ $n: y_4=a_4x$ (przechodzi przez (0,0) więc $b_4=0$).

Równocześnie przechodzi ona przez $A(7,-1)$, więc

$$-1=7a \Rightarrow a=-\frac{1}{7}.$$

Przechodzi także przez D, więc

$$\frac{y_B+y_C}{2}=-\frac{1}{7}\cdot\frac{x_B+x_C}{2}$$

Odległość od środka okręgu do D wynosi natomiast $r=\sqrt{10}$, więc

$$\left(\frac{x_B+x_C}{2}\right)^2+\left(\frac{y_B+y_C}{2}\right)^2=10$$

$$\left(\frac{x_B+x_C}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{7}\cdot\frac{x_B+x_C}{2}\right)^2=\left(\frac{x_B+x_C}{2}\right)^2+\frac{1}{49}\left(\frac{x_B+x_C}{2}\right)^2=10$$

$$\frac{50}{49}\left(\frac{x_B+x_C}{2}\right)^2=10$$

$$(x_B+x_C)^2=\frac{490\cdot 4}{50}=39{,}2$$

~~$\frac{(y_B+y_C)^2}{4}=10-\frac{(x_B+x_C)^2}{4}$ $\Rightarrow$ $(y_B+y_C)^2=40-(x_B+x_C)^2$~~

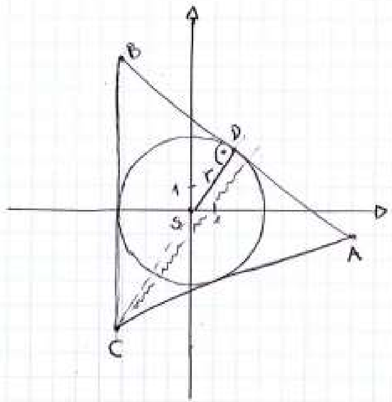
Odpowiedź: ....

Kłopoty już w początkowej fazie rozwiązania

(20/46p)

Zadanie 14. (0–6)

Punkt $A=(7,-1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Obie współrzędne wierzchołka C są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2+y^2=10$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.



$x^2+y^2=10 \longrightarrow S=(0,0)$, $r=\sqrt{10}$ $\quad r>0$

$|AC|=|BC|$

$|AD|=|BD|$

~~równanie prostej AB: AD:~~

~~$y=ax+b$~~

~~$-1=7a+b$~~

~~$b=-1-7a$~~

~~dla pkt. D: $y_D=ax_D-1-7a$~~

~~pkt. D leży na okręgu: $x_D^2+y_D^2=10$~~

~~$x_D^2+(ax_D-1-7a)^2=10$~~

równanie prostej AB: $y=ax+b$

dla pkt. A: $-1=7a+b$

$b=-1-7a$

$y=ax-1-7a$

$ax-y-1-7a=0$

$d(S, \text{prosta } AB)=r=\sqrt{10}$

$\frac{|a-1-7a|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{10}$

$a<0$, bo współrzędne pkt C są ujemne i $S=(0,0)$

$\frac{|-6a-1|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{10}$ $\quad a<0$

$-6a-1>0$, $-6a>1$, $a>-\frac{1}{6}$ $\quad$ $-6a-1<0$, $-6a<1$, $a<\frac{1}{6}$

dla $a\in(-\frac{1}{6},0)$

$-6a-1=\sqrt{10(a^2+1)}$

$-(36a^2+12a+1)=10a^2+10$

$-36a^2-12a-1=10a^2+10$

$-46a^2-12a-11=0$

$46a^2+12a+11=0$

$\Delta=144-2024<0$ sprzeczność

dla $a\in(-\infty,-\frac{1}{6})$

$6a+1=\sqrt{10(a^2+1)}$

$36a^2+12a+1=10a^2+10$

$26a^2+12a-9=0$

$\Delta=144+936=1080$ $\quad \sqrt{\Delta}=6\sqrt{30}$

$a_1=\frac{-12-6\sqrt{30}}{52}=\frac{-6-3\sqrt{30}}{26}<0$ $\quad \Rightarrow a=\frac{-6-3\sqrt{30}}{26}$

$a_2=\frac{-12+6\sqrt{30}}{52}=\frac{-6+3\sqrt{30}}{26}>0$

równanie prostej AB: $y=\frac{-6-3\sqrt{30}}{26}x+\frac{16+21\sqrt{30}}{26}$

współrzędne pkt. D: $\begin{cases} y=\frac{-6-3\sqrt{30}}{26}x+\frac{16+21\sqrt{30}}{26} \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$

$y=\sqrt{10-x^2}$

$\sqrt{10-x^2}=\frac{-6-3\sqrt{30}}{26}x+\frac{16+21\sqrt{30}}{26}$

Odpowiedź: ....

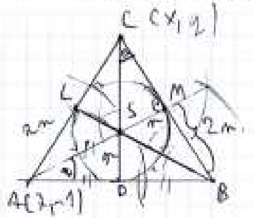
Wypełnia egzaminator	Nr zadania	14.
	Maks. liczba pkt	6
	Uzyskana liczba pkt	1

Syntetycznie, analitycznie ...

(32/46p)

Zadanie 14. (0–6)

Punkt $A=(7,-1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Obie współrzędne wierzchołka C są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2+y^2=10$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.



$C(x,y)$, $x<0$ i $y<0$

$O: x^2+y^2=10$

$S(0,0)$

$r=\sqrt{10}$

$|AS|=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

$r^2+|AD|^2=|AS|^2$

$10+|AD|^2=50$

$|AD|=2\sqrt{10}=|BD|$

$y^{BC}\perp y_{AS}$

$y_{BC}: y=7x+b$

M należy do okręgu. $M(a,b)$

$\begin{cases} a^2+b^2=10 \\ b=-\frac{1}{7}a \end{cases}$

$a^2+\frac{1}{49}a^2=10$

$M\left(\frac{7\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\in BC$

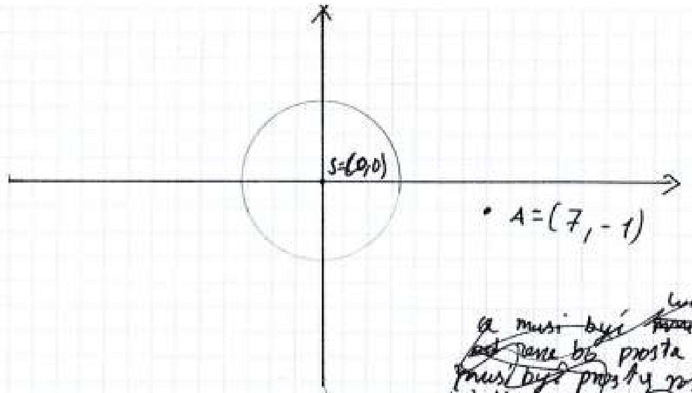
$y_{BC}=7x-10\sqrt{5}$

Odpowiedź: ....

(36/46p) Zła interpretacja równania z odległością ...

Zadanie 14. (0–6)

Punkt $A=(7,-1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Obie współrzędne wierzchołka C są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2+y^2=10$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.



~~a musi być mniejsze~~ większe ~~od~~ zero bo prosta „l" ~~musi być~~ prosty różna ~~a~~ jeżeli ma być styczna do okręgu

$r=\sqrt{10}$

$a>0$

$\cancel{a<0}$

prosta l: $y=ax+b$

przyjmijmy że jest prosta która przechodzi przez punkt A i jest styczna do okręgu o środku $S=(0,0)$ i promieniu $r=\sqrt{10}$

$A=(7,-1)$

$y=ax+b$

$-1=7a+b$

$-7a-1=b$

$\boxed{y=ax-7a-1}$

$$\sqrt{10}=\frac{|-7a-1|}{\sqrt{a^2+1}} \quad /^2$$

$$10a^2+10=49a^2+14a+1$$

$$0=39a^2+14a-9$$

$$\Delta=1600$$

$$\sqrt{\Delta}=40$$

$$a_1=\frac{-14-40}{78}\notin D$$

$$a_2=\frac{-14+40}{78}\in D$$

a musi być większe od zera bo żeby proste „l" mogła być styczne do okręgu i żeby mogła przechodzić przez punkt A i punkt C – który ma obie współrzędne ujemne

$$a=\frac{36}{78}=\frac{18}{39}=\frac{6}{13} \qquad \cancel{y=\frac{18}{39}x}$$

$$y=\frac{6}{13}\cdot x-\frac{42}{13}-1$$

$$C=\left(x_0,\ \frac{6}{13}x_0-\frac{55}{13}\right)$$

$k: y=a_3x+b_1$

prosta k przechodzi przez punkt B i C i jest styczna do okręgu

$$\frac{6}{13}x_0-\frac{55}{13}=a_3\cdot x_0+b_1$$

$$\cancel{b_1=-13x_0a_3+6x_0-55}$$

$$b_1=-13x_0\cdot a_3+6x_0-55$$

$$\cancel{B=(x_1,\ x_0x_1-13x_0^2+6x_0-55)}$$

$$|AC|=|BC| \qquad |AC|=\sqrt{(x_0-7)^2+\left(\frac{6}{13}x_0-\frac{55}{13}+1\right)^2}$$

$$\sqrt{10}=\frac{|-13x_0a_3+6x_0-55|}{\sqrt{a_3^2+1}}$$

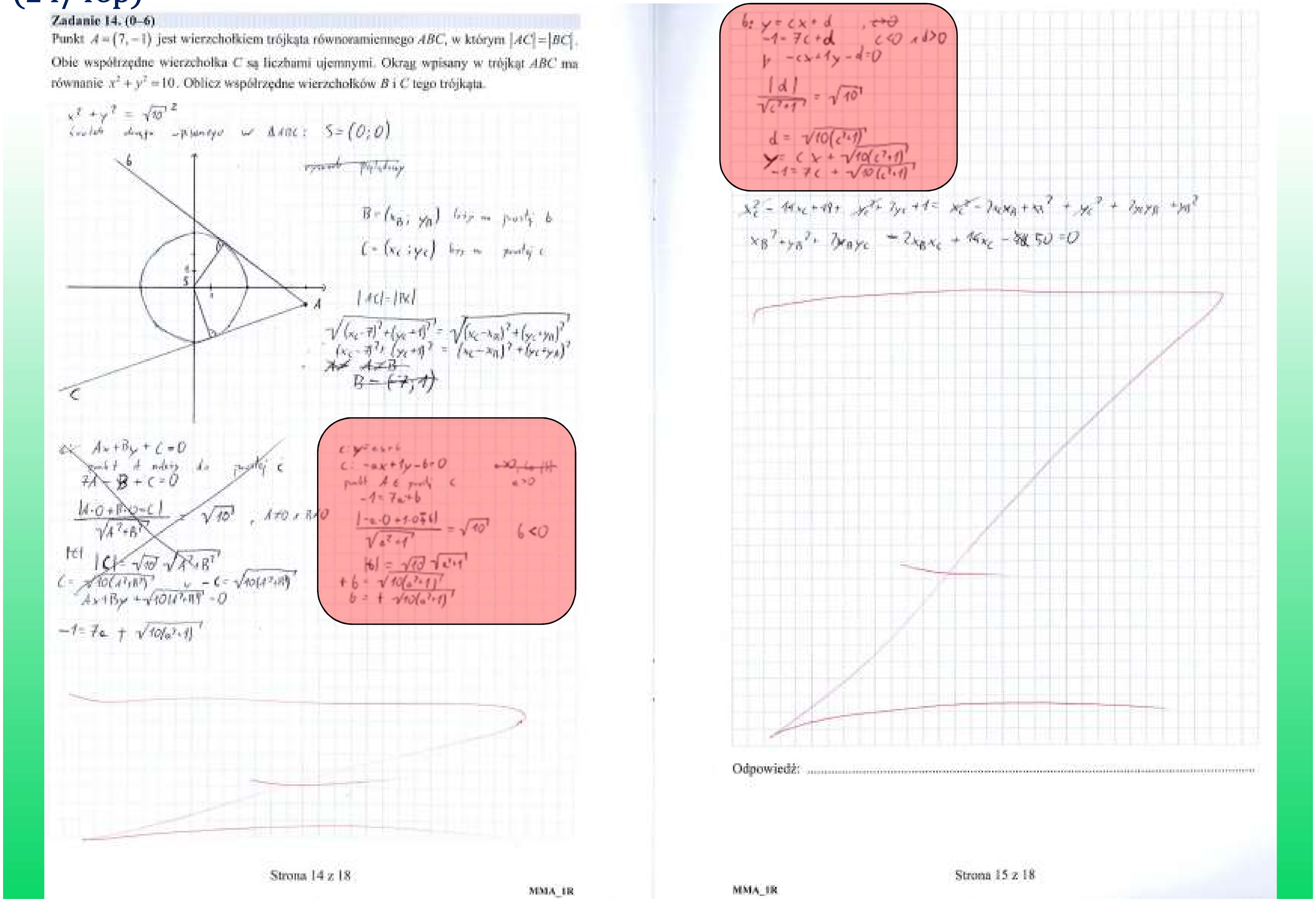
$$B=(x_1,\ x_0\cdot x_1-13x_0\cdot a_3+6x_0-55)$$

$$\cancel{40=}\quad 10a_3+10=\cancel{169x_0a_3^2}+|-13x_0\cdot a_3+6x_0-55|$$

Odpowiedź: ....

Jeszcze jeden kłopot z odległością ...

(24/46p)



Zadanie 14. (0–6)
Punkt $A = (7, -1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Obie współrzędne wierzchołka C są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2 + y^2 = 10$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.

Odpowiedź: ....

Sporo równań kwadratowych

(33/46p)

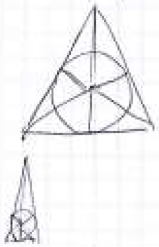
Zadanie 14. (0–6)

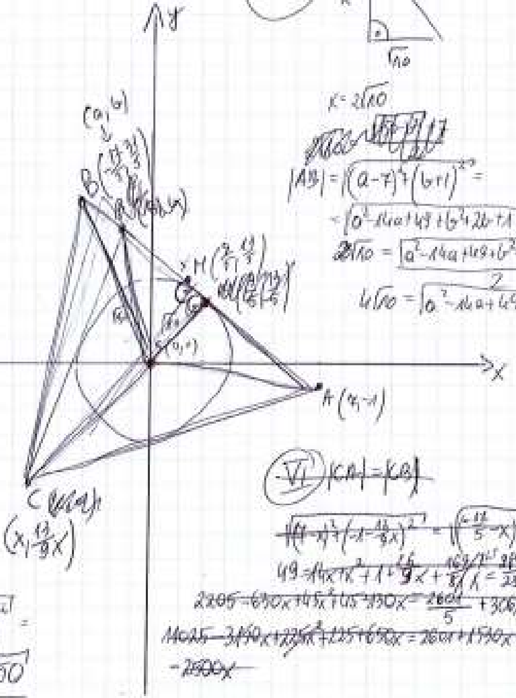
Punkt $A=(7,-1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Obie współrzędne wierzchołka C są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2+y^2=10$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.

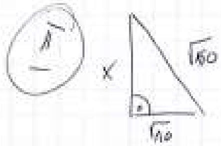
$A=(7,-1)$

$x^2+y^2=10$

$|AC|=|BC|$







$x=2\sqrt{10}$

$|AB|=\sqrt{(a-7)^2+(b+1)^2}=$

$=\sqrt{a^2-14a+49+b^2+2b+1}$

$4\sqrt{10}=\sqrt{a^2-14a+49+b^2+2b+1}$

I

$|AS|=\sqrt{(0-7)^2+(0+1)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}$

$|BS|=\sqrt{(0-a)^2+(0-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

$|CS|=\sqrt{c^2+d^2}$

$|AS|=|BS|=|CS|$

$\sqrt{50}=\sqrt{a^2+b^2}\ /()^2$

$50=a^2+b^2$

$a^2=50-b^2$

$a=\sqrt{50-b^2}\ \vee\ a=-\sqrt{50-b^2}$

VI $|AC|=|BC|$

VI $|AC|=\sqrt{49-14x+x^2+1+\frac{26}{9}x+\frac{169}{81}x^2}$

$x=2\sqrt{10}$

$|AC|^2=x^2+|CH|^2$

$|AC|=|BC|$

$\sqrt{(c-7)^2+(d+1)^2}=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}\ /()^2$

$2x=0$

$x=0$

$4\sqrt{10}=\sqrt{a^2-14a+49+b^2+2b+1}\ /()^2$

$160=a^2-14a+49+b^2+2b+1$

$160=50-b^2-14a+49+b^2+2b+1$

$14a=2b-60\ /:2$

$-7a=b-30$

$-7\sqrt{50-b^2}=b-30\ /()^2$

$49(50-b^2)=b^2-60b+900$

$2450-49b^2=b^2-60b+900$

$50b^2-60b-1550=0\ /:10$

$5b^2-6b-155=0$

$\Delta=36+3100=3136$

$\sqrt{\Delta}=56$

$b_1=\frac{6-56}{10}=\frac{-50}{10}=-5\notin D$

$b_2=\frac{6+56}{10}=\frac{62}{10}=\frac{31}{5}$

$b>0$

$a=\sqrt{50-\frac{31}{5}}=\sqrt{\frac{250-31}{5}}=$

III

$a=\sqrt{50-\frac{961}{25}}=\sqrt{\frac{289}{25}}=\frac{17}{5}$

$B=\left(-\frac{17}{5},\frac{31}{5}\right)$

IV punkt M

$M=\left(\frac{7-\frac{17}{5}}{2},\frac{-1+\frac{31}{5}}{2}\right)=\left(\frac{18}{10},\frac{26}{10}\right)=\left(\frac{9}{5},\frac{13}{5}\right)$

V prosta CS

$\begin{cases} 0=b \\ \frac{13}{5}=\frac{9}{5}a+b \end{cases}$

$\frac{9}{5}a=\frac{13}{5}\ /\cdot 5$

$9a=13$

$a=\frac{13}{9}$

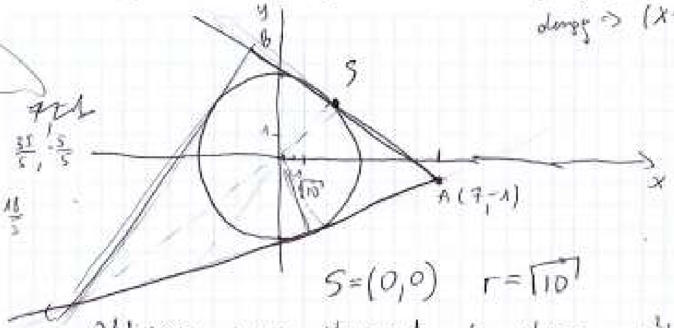
$y=\frac{13}{9}x$

Odpowiedź: $B=\left(-\frac{17}{5},\frac{31}{5}\right)$

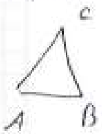
6/6 - zdający wyraźnie „uciekł” od równań kwadratowych (31/46p)

Zadanie 14. (0–6)

Punkt $A=(7,-1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Obie współrzędne wierzchołka C są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2+y^2=10$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.



okrąg $\Rightarrow (x-0)^2+(y-0)^2=10$



$S=(0,0)$ $r=\sqrt{10}$

Obliczam wzory stycznych do okręgu $x^2+y^2=10$ przechodzące przez punkt $A=(7,-1)$

$y=ax+b$ $\quad -1=7a+b \Rightarrow b=-1-7a$

$y=ax-1-7a$

$ax-y-(1+7a)=0$

$$\frac{|0\cdot a+0\cdot 1-(1+7a)|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{10}$$

$|-1-7a|=\sqrt{10}\cdot\sqrt{a^2+1}$

$1+49a^2+14a=10(a^2+1)$

$1+49a^2+14a=10a^2+10$

$39a^2+14a-9=0$

$\Delta=1600$

$\sqrt{\Delta}=40$

$a=\frac{-14+40}{78} \lor a=\frac{-14-40}{78}$

$a=\frac{26}{78}=\frac{1}{3} \lor a=\frac{-54}{78}=\frac{-27}{39}=\frac{-9}{13}$

$a=\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}$

$a=-\frac{9}{13} \Rightarrow$

$y=-\frac{9}{13}x-1-\frac{7(-9)}{13}=-\frac{9}{13}x-1+\frac{63}{13}$

$=-\frac{9}{13}x+\frac{50}{13}$

wysokość z wierz. C należy to prosta prostopadła do prostej $-\frac{9}{13}x+\frac{50}{13}$ przechodząca przez początek układu współrzędnych więc. Stąd jej wzór to $\frac{13}{9}x+b$, $\frac{13}{9}\cdot 0+b=0 \Rightarrow b=0$

prosta $\frac{13}{9}x$

$\frac{13}{9}x=-\frac{9}{13}x+\frac{50}{13}$

$\frac{169}{9}x=-9x+50$

$169x=-81x+450$

$250x=450$

$x=\frac{45}{25}=\frac{9}{5}$, $y=\frac{13}{5}$

współrzędne B to współ. S przesunięte o wektor

stąd $B=\left(-\frac{17}{5},\frac{31}{5}\right)$. A współ. C to punkt przecięcia wysokości oraz prostej $\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}$. Stąd $\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}=\frac{13}{9}x$

$3x-30=13x$

Odpowiedź: $B=\left(-\frac{17}{5},\frac{31}{5}\right)$, $C=\left(-3,-\frac{13}{3}\right)$

Zagadnienie optymalizacyjne, maj 2018

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2.

a) Wyznacz wszystkie wartości a, dla których istnieje trapez o podanych własnościach.

b) Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu, wyraża się wzorem $L(a) = \frac{4a^2 - 8a + 8}{a}$.

c) Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.

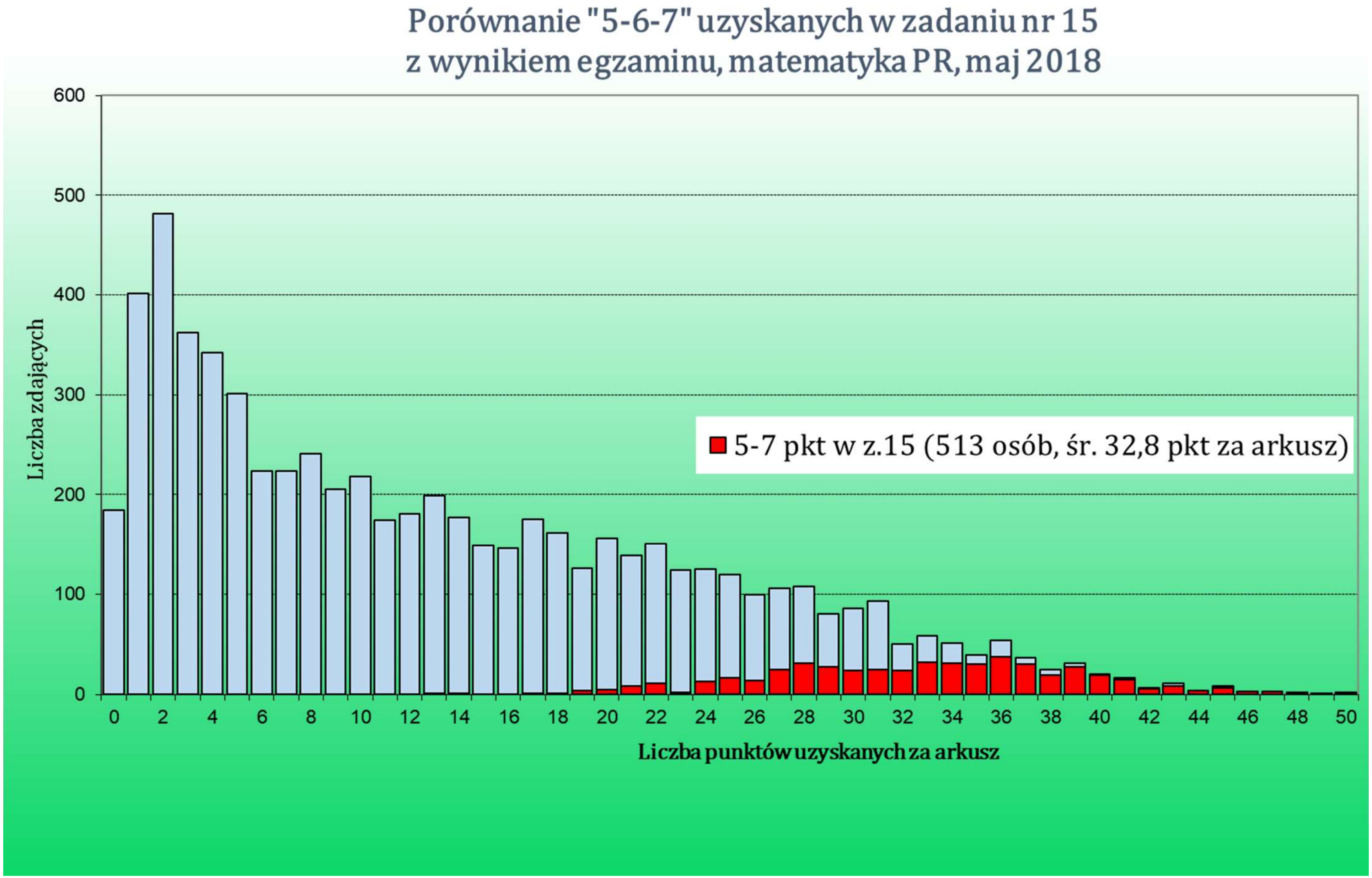
0	69,9%
1	10,9%
2	4,4%
3	3,3%
4	3,1%
5	3,6%
6	3,6%
7	0,6%

Wskaźnik łatwości zadania = 0,12

(w kraju 0,14)

26,7% opuszczeń

„Dobre” wyniki w zadaniu nr 15 a wynik egzaminu



ZADANIE OPTYMALIZACYJNE 2015 - 2018

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2.

a) Wyznacz wszystkie wartości a, dla których istnieje trapez o podanych własnościach.

b) Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu, wyraża się wzorem $L(a)=\dfrac{4a^2-8a+8}{a}$.

c) Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.

Łatwość: **0,12**

26,7% opuszczeń

Zadanie 15. (0–7)

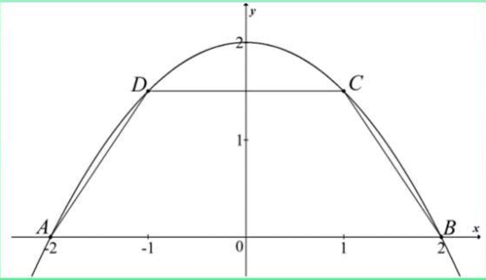
Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej P. Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.

Łatwość: **0,24**

24,7% opuszczeń

Zadanie 16. (0–7)

Parabola o równaniu $y=2-\frac{1}{2}x^2$ przecina oś Ox układu współrzędnych w punktach $A=(-2,0)$ i $B=(2,0)$. Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne $ABCD$, których dłuższą podstawą jest odcinek AB, a końce C i D krótszej podstawy leżą na paraboli (zobacz rysunek).



Wyznacz pole trapezu $ABCD$ w zależności od pierwszej współrzędnej wierzchołka C. Oblicz współrzędne wierzchołka C tego z rozpatrywanych trapezów, którego pole jest największe.

Łatwość: **0,24**

25,5% opuszczeń

Zadanie 16. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa. Oblicz objętość tego stożka.

Łatwość: **0,34**

6,3% opuszczeń

Najczęstsze kłopoty zdających w zadaniu nr 15

- Zmiana konstrukcji zadania optymalizacyjnego.
- Poprawne wyznaczenie zbioru wartości a, dla których istnieje rozważany trapez.
- Poprawne wyznaczenie pochodnej funkcji L.
- Poprawne uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji L.

(29/46p)

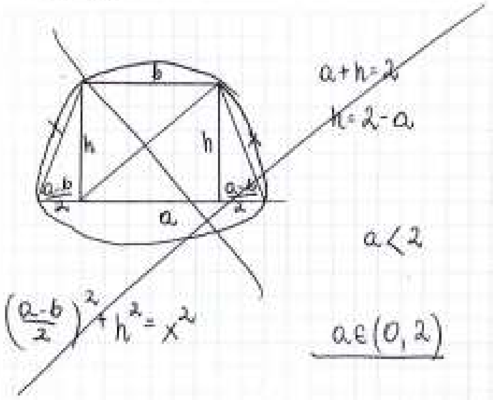
Trudno ustalić dziedzinę

Zadanie 15. (0–7)
Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2.

a) Wyznacz wszystkie wartości a, dla których istnieje trapez o podanych własnościach.

b) Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu, wyraża się wzorem $L(a)=\frac{4a^2-8a+8}{a}$.

c) Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.



$a+h=2$

$h=2-a$

$a<2$

$\frac{16}{4a}+a-4>0$

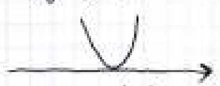
$16+4a^2-16a>0$

$4a^2-16a+16>0$

$a^2-4a+4>0$

$\Delta=16-16=0$

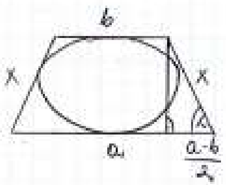
$x_0=\frac{4}{2}=2$



$a\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+h^2=x^2$

$\underline{a\in(0,2)}$



$a+h=2$

$h=2-a$

$(2-a)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=x^2$

$4-4a+a^2+\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}$

$16-16a+4a^2+\cancel{a^2}-2ab+\cancel{b^2}=\cancel{a^2}+2ab+\cancel{b^2}$

$16-16a+4a^2-4ab=0$

$4a^2-16a+16-4ab=0$

$4a(a-4-b)+16=0$

$a+b=2x$

$x=\frac{a+b}{2}$

$x^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$\frac{a-b}{2}=\frac{\sqrt2-\frac{4}{\sqrt2}-\sqrt2+4}{2}=\frac{4-\frac{4}{\sqrt2}}{2}=$

$=\frac{4-2\sqrt2}{2}=2-\sqrt2$

$a-4-b=\frac{-16}{4a}$

$-4-b=\frac{-16}{4a}-a$

$-b=\frac{-16}{4a}-a+4$

$b=\frac{16}{4a}+a-4$

$x=\frac{a+\frac{16}{4a}+a-4}{2}$

$a+\frac{16}{4a}+a-4>0$

$4a^2+16+4a^2-16a>0$

$8a^2-16a+16>0$

$a^2-2a+2>0$

$\Delta=4+$

$b=\frac{16}{4\sqrt2}+\sqrt2-4=\frac{4}{\sqrt2}+\sqrt2-4$

$L(a)=a+\frac{16}{4a}+a-4+a+\frac{16}{4a}+a-4=4a+\frac{32}{4a}-8=\frac{16a^2+32-32a}{4a}=$

$=\frac{4a^2-8a+8}{a}$ c.n.u.

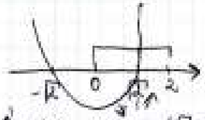
$L'(a)=\frac{(8a-8)\cdot a-1(4a^2-8a+8)}{a^2}=$

$=\frac{8a^2-8a-4a^2+8a-8}{a^2}=\frac{4a^2-8}{a^2}$

$a^2>0$ dlatego wystarczy ograniczyć się do badania funkcji $y=4a^2-8$

$4a^2-8=0$

$a=\sqrt2$ $a=-\sqrt2$
sprz.



$L_{min}=L(\sqrt2)$ wynika stąd, że f. przyjmuje najmniejszą wartość dla $a=\sqrt2$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2-\sqrt2}{2-\sqrt2}=1$

$L'(a)>0$ dla $a\in(\sqrt2,2)$ dlatego f. rośnie w przedz. $(\sqrt2,2)$

$L'(a)<0$ dla $a\in(0,\sqrt2)$ dlatego f. maleje w przedz. $(0,\sqrt2)$

Odpowiedź: ....

Rezygnacja z podpunktu b)

(26/46p)

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2.

a) Wyznacz wszystkie wartości a, dla których istnieje trapez o podanych własnościach.

b) Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu, wyraża się wzorem $L(a) = \frac{4a^2 - 8a + 8}{a}$.

c) Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.

a) $a + b = 2c$

$a + H = 2$

$H = 2a$

$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + (2-a)^2 = c^2$

$3b^2 - 6ab + 5a^2 - 16a = 0$ $\Delta = 36a^2 - 4 \cdot 3 \cdot (5a^2 - 16a) > 0$

$36a^2 - 12(5a^2 - 16a) > 0$

$-24a^2 + 16a > 0$

$a = 0$

$a = 8$

$a \in (0; 8)$

b) ~~...~~

c) $L(a) = \frac{4a^2 - 8a + 8}{a}$

$L'(a) = \frac{(8a-8)a - (4a^2 - 8a + 8)}{a^2}$

$L'(a) = \frac{4a^2 - 8}{a^2} \to min$

$L'(a) = 0$

$4a^2(a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2}) = 0$

$L \to min$ dla $a = \sqrt{2}$

$tg\alpha = \frac{2(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2} - b}$

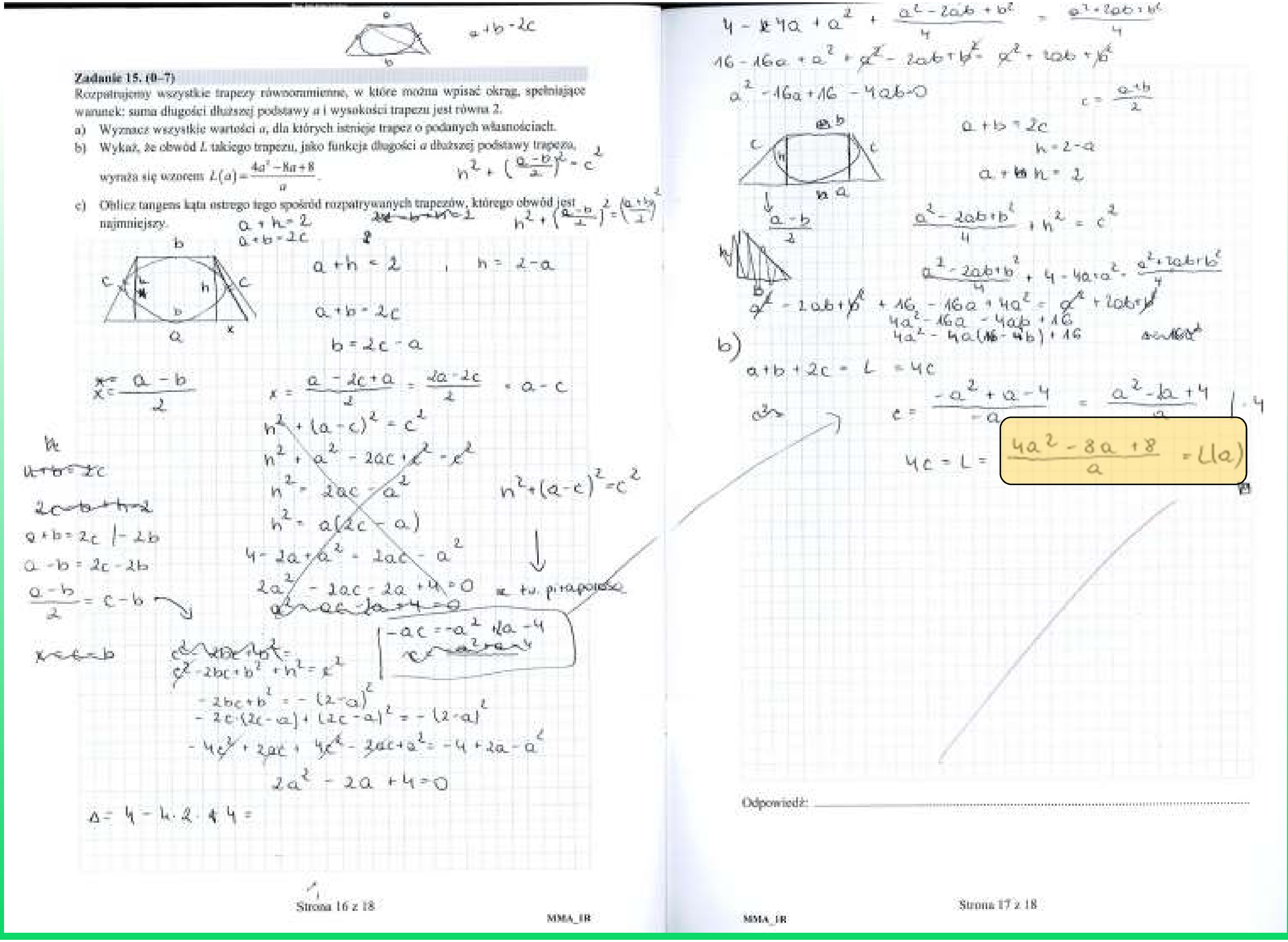
Strona 16 z 18

MMA_1R

Odpowiedź: $a \in (0; 8)$

Tylko podpunkt b)

(20/46p)



Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2.

a) Wyznacz wszystkie wartości a, dla których istnieje trapez o podanych własnościach.

b) Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu, wyraża się wzorem $L(a)=\frac{4a^2-8a+8}{a}$.

c) Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.

$a+h=2$, $h=2-a$

$a+b=2c$

$b=2c-a$

$x=\frac{a-b}{2}$

$x=\frac{a-2c+a}{2}=\frac{2a-2c}{2}=a-c$

$h^2+(a-c)^2=c^2$

$h^2=a(2c-a)$

$4-2a+a^2=2ac-a^2$

$2a^2-2ac-2a+4=0$

$-ac=-a^2+a-4$

b)

$a+b+2c=L=4c$

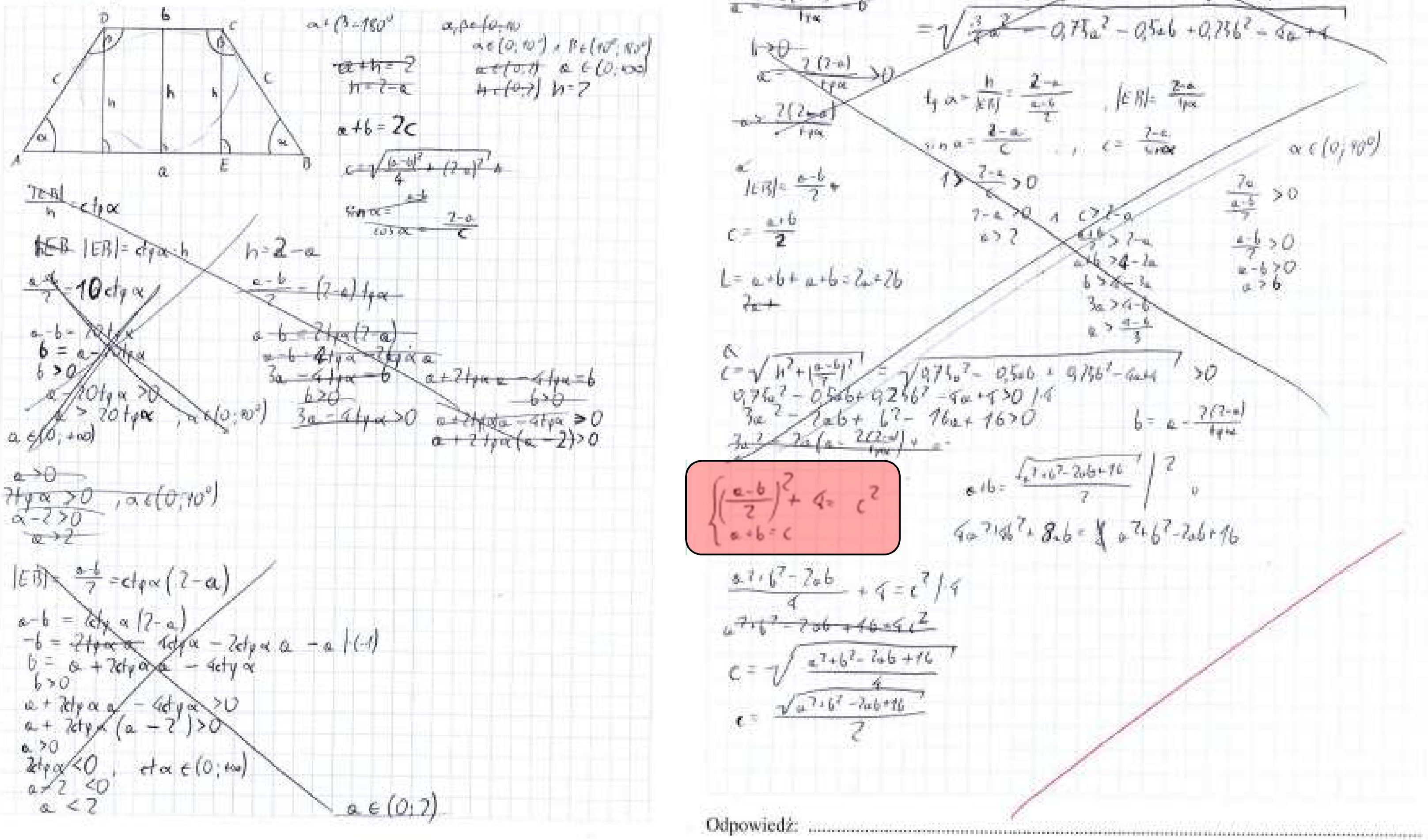
$c=\frac{-a^2+a-4}{-a}=\frac{a^2-a+4}{a}\quad |\cdot 4$

$4c=L=\boxed{\frac{4a^2-8a+8}{a}=L(a)}$

Odpowiedź: ……………………………………

Wprowadził miary kątów, stracił dużo czasu …

(24/46p)



Zadanie 15. (0–7)
Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2.

a) Wyznacz wszystkie wartości a, dla których istnieje trapez o podanych własnościach.

b) Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu, wyraża się wzorem $L(a)=\frac{4a^2-8a+8}{a}$.

c) Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.

$$\begin{cases}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+4=c^2\\ a+b=c\end{cases}$$

$$c=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab+16}}{2}$$

Odpowiedź: ....

Strona 16 z 18

MMA_1R

Wypełnia	Nr zadania	15.
	Maks. liczba pkt	7

Rezygnacja z podpunktu b) ale ...

(23/46p)

Zadanie 15. (0–7)

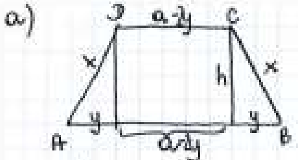
Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2.

a) Wyznacz wszystkie wartości a, dla których istnieje trapez o podanych własnościach.

b) Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu, wyraża się wzorem $L(a) = \frac{4a^2-8a+8}{a}$.

c) Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.

a)



$a+h=2 \quad h=2-a$

$h^2+y^2=x^2$

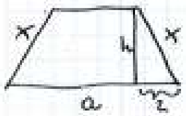
$y=\sqrt{x^2-h^2}$

$2x = a+a-2y$

$2x = 2a-2y$

$x = a-y$

$x = a-y$



$a+b=x+x$

$a=2-h$

$2-h+b=2x$

$z=\frac{a-b}{2}$

$a=b+2z=b+\frac{2a-2b}{4}$ ... $\frac{2b+2a}{4}=\frac{b+a}{2}$

$\begin{cases} h^2+z^2=x^2 \\ a+h=2 \\ z=\frac{a-b}{2} \\ 2x=a+b \end{cases}$ $\quad a=2-h \quad 2-h=2x-b \quad a=2x-b$

$\begin{cases} 2z=a-b \\ 2x=a+b \\ a+h=2 \\ h^2+z^2=x^2 \end{cases}$ $\quad 2z+2x=2a \quad a=z+x \quad z=a-x \quad z+x+h=2 \quad h=2-a$

$h^2+z^2=x^2$

$h^2+a^2-2ax+\cancel{x^2}=\cancel{x^2}$

$4-4a+a^2+a^2-2ax=0$

$2a^2-4a-2ax+4=0$

$2a^2-2a(2+x)+4=0$

$\Delta \geq 0$

$\Delta = (4+2x)^2-32 = 16+16x+4x^2-32 = 4x^2+16x-16$

b)

$x^2+4x-4=0$

$\Delta = 16+16=32$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{32}$

$x_1 = \frac{-4+\sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2}-2$

$x_2 = \frac{-4-\sqrt{32}}{2} = -2\sqrt{2}-2$

$2a^2-4a-2a(2\sqrt{2}-\sqrt{2})+4=0$

$2a^2-4a-4\sqrt{2}a+2\sqrt{2}a+4=0$

$2a^2-a(4+2\sqrt{2})+4 \geq 0$

$\Delta = (4+2\sqrt{2})^2-32 = 16+32\sqrt{2}+8 = 32\sqrt{2}+24$

$a_1=$

$a_2=$

c) $L=\frac{4a^2-8a+8}{a}$

$L'=\frac{(8a-8)a-(4a^2-8a+8)}{a^2}$

$L'=\frac{8a^2-8a-4a^2+8a-8}{a^2}=\frac{4a^2-8}{a^2}$

$D: a \in (0,\infty)$

obwód będzie jak najmniejszy gdy wynik ułamka będzie jak najmniejszy więc do dalszych obliczeń przyjmuję funkcję $f(x)=4a^2-8$

$4a^2-8=0$

$4(a^2-2)=0$

$4(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})=0$

$a=\sqrt{2} \vee a=-\sqrt{2}$

$f'(x)>0$ dla $x\in(-\infty,-\sqrt{2}), x\in(\sqrt{2},\infty)$

$f'(x)<0$ dla $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

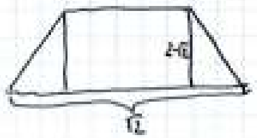
$f(x)\nearrow$ dla $x\in(-\infty,-\sqrt{2}\rangle \cup \langle\sqrt{2},\infty)$

$f(x)\searrow$ dla $x\in\langle-\sqrt{2},\sqrt{2}\rangle$

więc ma minimum lokalne w punkcie $a_0=\sqrt{2}$

$a=\sqrt{2}$

$h=2-\sqrt{2}$



Odpowiedź: ....

Wypełnia	Nr zadania	15.
	Maks. liczba pkt	7

Dowód jest, a co z optymalizacją?

(22/46p)

$\sqrt{ab} = 2-a$

$\left(\frac{a^2-2ab+b^2}{4} + 4-4a+a^2\right) = c^2$

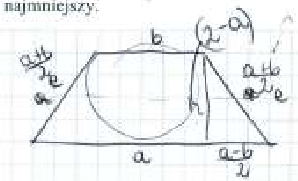
Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2.

a) Wyznacz wszystkie wartości a, dla których istnieje trapez o podanych własnościach.

b) Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu, wyraża się wzorem $L(a)=\frac{4a^2-8a+8}{a}$.

c) Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.



1) $a+h=2$

2) $a+b=2c$ z w. czworokąta opisanego na okręgu

$h=2-a$

zw. Pitagorasa

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=h^2$

$\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}=h^2$

$\frac{[a+b-(a-b)](a+b+a-b)}{4}=h^2$

$\frac{(a+b-a+b)(2a)}{4}=h^2$

$\frac{2b\cdot 2a}{4}=h^2$

$\frac{4ab}{4}=h^2$

$ab=h^2$

$\boxed{h=\sqrt{ab}}$

$\sqrt{ab}=2-a$

$ab=(2-a)^2$

$ab=4-4a+a^2$

$b=\frac{4-4a+a^2}{a}$

$\frac{4-4a+a^2}{a}+a=$

b) $Ob=\frac{4-4a+a^2}{a}+a+a+\frac{4-4a+a^2}{a}=$

$=\frac{2(4-4a+a^2)}{a}+\frac{2a^2}{a}=\frac{8-8a+2a^2+2a^2}{a}=\frac{4a^2-8a+8}{a}$

c.n.u.

z własności okręgu wpisanego w czworokąt

c) $\left[\frac{a+b}{2}\right]^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=h^2$

$h=\sqrt{ab}$

$(2-a)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=c^2$

$4-4a+a^2+\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=c^2$

$1\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}ab+\frac{b^2}{4}$

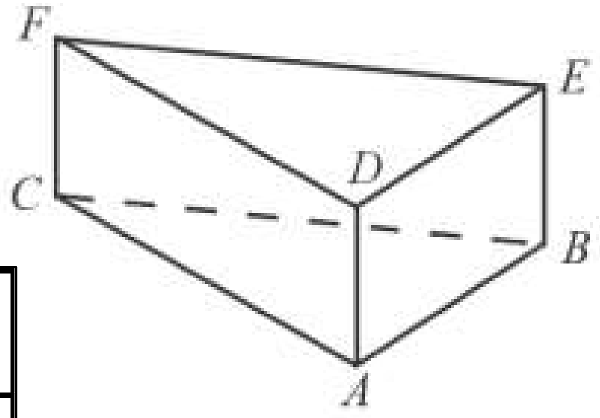
Odpowiedź: ....

Wypełnia	Nr zadania	15.
	Maks. liczba pkt	7

Zadanie nr 34 – poziom podstawowy

Zadanie 34. (0–4)

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny (zobacz rysunek). Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe $45\sqrt{3}$. Pole podstawy graniastosłupa jest równe polu jednej ściany bocznej. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



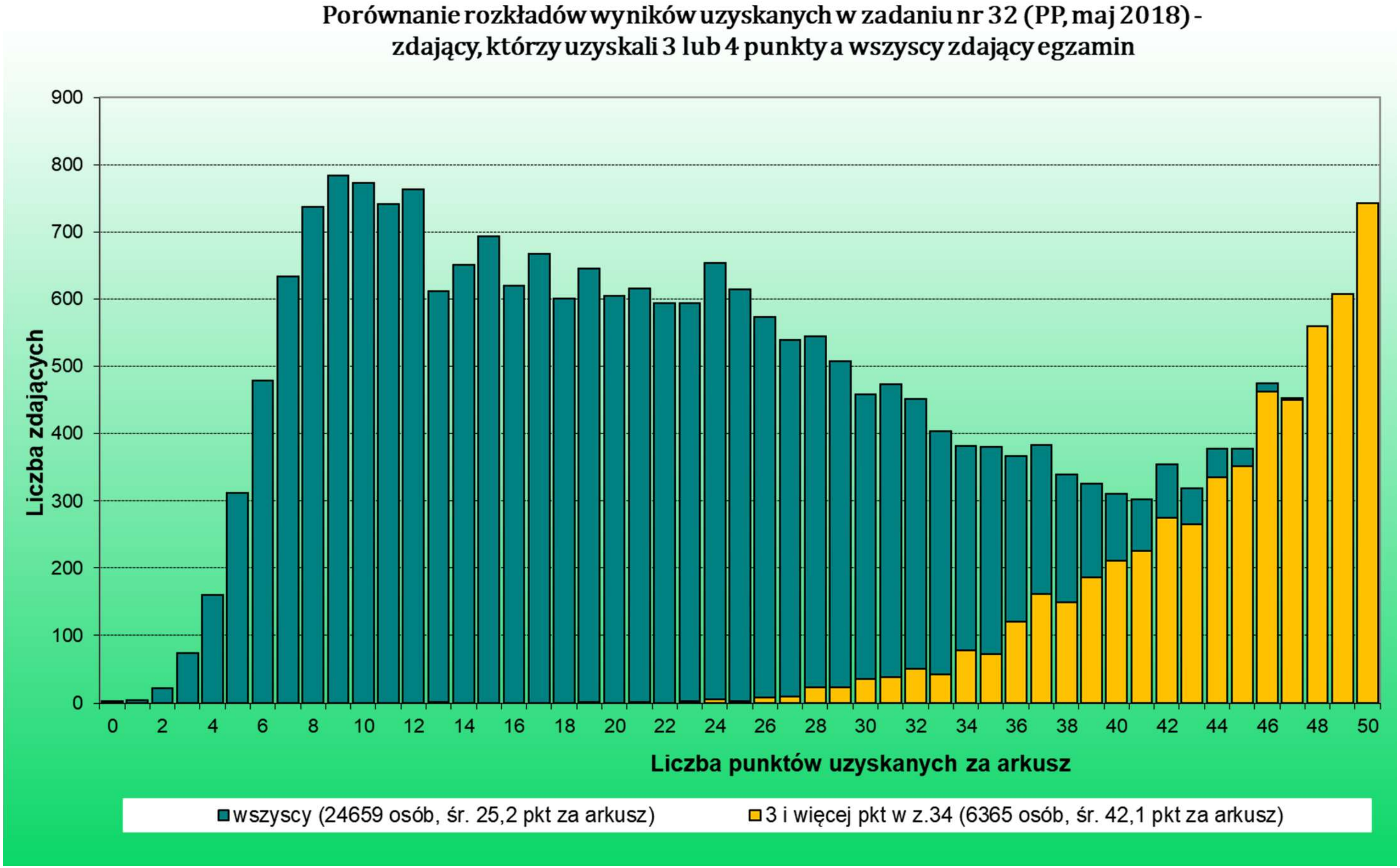
0	60,8%
1	8,8%
2	4,6%
3	3,8%
4	22,1%

Wskaźnik łatwości zadania = 0,29

25,8% opuszczeń

(dane dla wszystkich zdających)

Zadanie nr 34 – korelacja „dobrych wyników” z wynikami wszystkich zdających



Najczęstsze kłopoty zdających w zadaniu nr 34

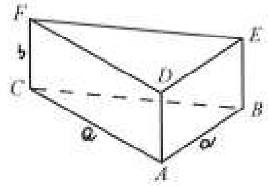
- Prawidłowa interpretacja treści tego zadania, w szczególności odróżnianie pola powierzchni bocznej od pola jednej ściany bocznej albo zakładanie, że trójkąt ABC jest prostokątny.
- Trudności z wyprowadzeniem wniosku dotyczącego pola jednej ściany graniastosłupa.
- Posługiwanie się wzorem $P_b = 2p \cdot h$ z *Zestawu*.
- Przekształcenia wzorów, upraszczanie równań, prowadzenie obliczeń.

Dwa różne znaczenia symbolu P_b

(17/25p)

Zadanie 34. (0–4)

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny (zobacz rysunek). Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe $45\sqrt{3}$. Pole podstawy graniastosłupa jest równe polu jednej ściany bocznej. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



$P_{pc} = 45\sqrt{3}$ $\qquad P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $\qquad D: a>0, \; b>0$

$\boxed{P_b = P_p \\ P_{pc} = P_b + 2P_p = 3P_p}$ $\qquad \boxed{3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 45\sqrt{3}}$

$\frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = 45\sqrt{3} \quad / \cdot 4$

$3a^2\sqrt{3} = 180\sqrt{3} \quad / : 3\sqrt{3}$

$a^2 = 60$

$a = 2\sqrt{15}$

$3 \cdot a \cdot b = P_b$

$3ab = P_b$

$3 \cdot 2\sqrt{15} \cdot b = \frac{(2\sqrt{15})^2\sqrt{3}}{4}$

$6\sqrt{15}\, b = \frac{60\sqrt{3}}{4} \quad / \cdot 4$

$24\sqrt{15}\, b = 60\sqrt{3} \quad / : 24\sqrt{15}$

$b = \frac{60\sqrt{3}}{24\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \frac{60\sqrt{45}}{360} = \frac{\sqrt{45}}{6} = \frac{3\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$b = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$V = P_p \cdot b$

$V = \frac{(2\sqrt{15})^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}$

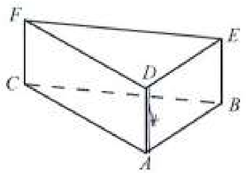
$V = \frac{60\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{60\sqrt{15}}{8} = \frac{15\sqrt{15}}{2}$

Zaklęty krąg pól powierzchni – zawinił rysunek?

(16/25p)

Zadanie 34. (0–4)

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny (zobacz rysunek). Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe $45\sqrt{3}$. Pole podstawy graniastosłupa jest równe polu jednej ściany bocznej. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



$P_{ABED} = |DE| \cdot H = P_2$

$P_{ACDF} = |DF| \cdot H = P_3$

$P_{EBCF} = |EF| \cdot H$

$V = H \cdot P_p$

$P_c = 45\sqrt{3}$

$\boxed{P_b = P_1 + P_2 + P_3}$

$P_p = P_1$

$P_c = 2P_p + P_b = 3P_p + P_2 + P_3$

$P_c = 2 \cdot \frac{|DE| \cdot |DF|}{2} + |DE| \cdot H + |DF| \cdot H$

$P_c = 3 \cdot \frac{|DE| \cdot |DF|}{2} + (|DE| + |DF|) \cdot H$

$P_c = \frac{3}{2} |DE| \cdot |DF| +$

$45\sqrt{3} = 3P_p + P_2 + P_3$

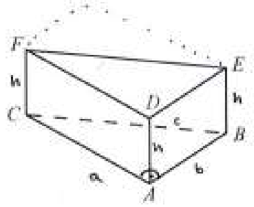
Odpowiedź: ....

Zawinił rysunek? Graniastosłup jest prawidłowy!

(14/25p)

Zadanie 34. (0–4)

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny (zobacz rysunek). Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe $45\sqrt{3}$. Pole podstawy graniastosłupa jest równe polu jednej ściany bocznej. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



$P_c = 45\sqrt{3}$

$V = ?$

$\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$

$P_1 = bh$

$P_2 = ah$

$P_3 = ch$

$P_p = \frac{ab}{2}$

$\boxed{bh + ah + ch + ab = 45\sqrt{3}}$

$h(a+b+c) + ab = 45\sqrt{3}$

$V = P_p \cdot h = \frac{ab}{2} \cdot h$

$\boxed{P_p \text{ musi być równe } P_1 = bh}$

$bh = \frac{ab}{2}$

$2bh = ab$

$a = 2h$

$V = \frac{ab}{2} \cdot a = \frac{a^2 b}{2}$

$h = \frac{1}{2}a$

$\frac{1}{2}a(a+b+c) + a+b = 45\sqrt{3}$

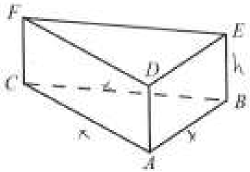
$a\left[\frac{1}{2}(a+b+c) + b\right] = 45\sqrt{3}$

Odpowiedź: ....

Przekształceń zdający się nie obawiał

(21/25p)

Zadanie 34. (0–4)
Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny (zobacz rysunek). Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe $45\sqrt{3}$. Pole podstawy graniastosłupa jest równe polu jednej ściany bocznej. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



$P_c = 45\sqrt{3}$

$P_p = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$

$45\sqrt{3} = 2\left(\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\right) + 2\cdot(3x)\cdot h$

$45\sqrt{3} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} + 6x\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4x} \quad /\cdot 4x$

$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = x\cdot h \quad /:x$

$\cancel{x^2\sqrt{3} = 4xh}$

$\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{x} = h$

$180\sqrt{3}\,x = 2x^3\sqrt{3} + 6x^3\sqrt{3}$

$180\sqrt{3}\,x = 8\sqrt{3}\,x^3$

$180\,x\sqrt{3} = 8x^3\sqrt{3}$

$0 = 8x^3\sqrt{3} - 180x\sqrt{3}$

$0 = \sqrt{3}x(8x^2 - 180)$

$V = P_p\cdot h$

$\cancel{0 = 8\sqrt{3}x^3 - 180\sqrt{3}x}$

$\cancel{0 = \sqrt{3}x(8x^2 - 180)}$

$8x^2 - 180 = 0$

$8x^2 = 180$

$x^2 = \frac{180}{8}$

$x^2 = \frac{90}{4} \qquad x = \frac{3\sqrt{10}}{2}$

$h = \left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4\cdot\frac{3\sqrt{10}}{2}} =$

$= \frac{90}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{6\sqrt{10}} = \frac{90\sqrt{3}}{24\sqrt{10}} =$

$= \frac{45\sqrt{3}}{12\sqrt{10}}$

$\frac{45\sqrt{3}}{12\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{45\sqrt{30}}{120} = \frac{9\sqrt{30}}{24} = \frac{3\sqrt{30}}{8}$

$P_p = \left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{90}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} =$

$= \frac{90\sqrt{3}}{16} = \frac{45\sqrt{3}}{8}$

$V = P_p\cdot h = \frac{45\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{3\sqrt{30}}{8} = \frac{135\sqrt{270}}{64} =$

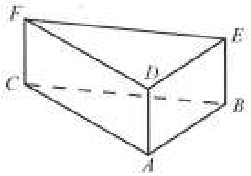
$= \frac{135\cdot 3\sqrt{30}}{64} = \frac{405\sqrt{30}}{64}\ [j^3]$

Odpowiedź: Objętość tego graniastosłupa jest równa $\frac{405\sqrt{30}}{64}\ [j^3]$

Trudno połączyć uzyskane informacje

(15/25p)

Zadanie 34. (0–4)
Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny (zobacz rysunek). Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe $45\sqrt{3}$. Pole podstawy graniastosłupa jest równe polu jednej ściany bocznej. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



$V_c = ?$

$P_p = P_{śb}$

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a \cdot h \quad / \cdot 4$

$\boxed{a^2\sqrt{3} = 4ah}$

$\cancel{P_c = 45\sqrt{3}}$

$\cancel{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = 45\sqrt{3}}$

$\cancel{\frac{a^2\sqrt{3} \cdot h}{4} = 45\sqrt{3} \quad / \cdot 4}$

$\cancel{a^2\sqrt{3}h = 180\sqrt{3} \quad / : \sqrt{3}}$

$\cancel{a^2 h = 180}$

$\cancel{P_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$

$P_c = 2P_p + 3P_b$

$P_c = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3ah$

$\frac{2a^2\sqrt{3}}{4} + 3ah = 45\sqrt{3} \quad / \cdot 4$

$2a^2\sqrt{3} + 12ah = 180\sqrt{3} \quad / : 2$

$\boxed{a^2\sqrt{3} + 6ah = 90\sqrt{3}}$

Odpowiedź: ....

Bardzo dziękuję za uwagę.

Wskaźniki łatwości - zadania zamknięte (PR, maj 2018)

Zadanie 1. (0–1)

Dane są liczby: $a=\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$, $b=\frac{1}{2\sqrt[4]{8}}$, $c=\sqrt[4]{8}$, $d=\frac{2}{\sqrt[4]{8}}$ oraz $k=2^{-\frac{1}{4}}$. Prawdziwa jest równość

A. $k=a$ **B.** $k=b$ **C.** $k=c$ **D.** $k=d$

0,69 (kraj: 0,72)

Zadanie 2. (0–1)

Równanie $\left||x|-2\right|=|x|+2$

A. nie ma rozwiązań.

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie.

C. ma dokładnie dwa rozwiązania.

D. ma dokładnie cztery rozwiązania.

0,59 (kraj: 0,60)

Zadanie 3. (0–1)

Wartość wyrażenia $2\log_5 10-\frac{1}{\log_{20} 5}$ jest równa

A. -1 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

0,74 (kraj: 0,76)

Zadanie 4. (0–1)

Granica $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{-x+2}{x^2-5x+6}$ jest równa

A. $-\infty$ **B.** -1 **C.** 0 **D.** $+\infty$

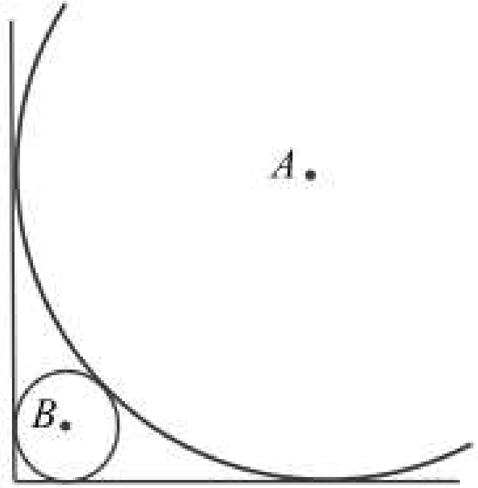
0,43 (kraj: 0,43)

Zadania zamknięte w maju 2018 r. – poziom rozszerzony – wyniki punktowe

Zadanie nr 29, (PP) maj 2018 r.

Zadanie 29. (0–2)

Okręgi o środkach odpowiednio A i B są styczne zewnętrznie i każdy z nich jest styczny do obu ramion danego kąta prostego (zobacz rysunek). Promień okręgu o środku A jest równy 2.



Uzasadnij, że promień okręgu o środku B jest mniejszy od $\sqrt{2}-1$.

Rozkłady punktów uzyskanych w zadaniach otwartych, maj 2018 (PR), N = 6485

	Z 5	Z 6	Z 7	Z 8	Z 9	Z 10	Z 11	Z 12	Z 13	Z 14	Z 15
0	84,8%	43,2%	75%	93,3%	37%	32,8%	63,3%	43,3%	26,9%	81,5%	69,9%
1		22,4%	6,46%	3,7%	49,3%	19,3%	15,3%	11,5%	21,1%	8,37%	10,9%
2	14,7%	7,12%	2,21%	0,51%	8,97%	6,46%	8,57%	6,6%	10,1%	4,79%	4,43%
3		26,7%	15,8%	1,93%	0,81%	10,2%	6,4%	9,33%	14,1%	2,22%	3,27%
4					3,44%	30,8%	5,92%	7,04%	27,2%	1,3%	3,14%
5								8,11%		0,63%	3,63%
6								13,5%		0,64%	3,57%
7											0,64%

Rozkłady punktów uzyskanych w zadaniach otwartych, maj 2018 (PP), N = 24 648

	Z 26	Z 27	Z 28	Z 29	Z 30	Z 31	Z 32	Z 33	Z 34
0	22,6%	32,6%	79,3%	79,9%	43,7%	36,6%	64,6%	36,7%	60,8%
1	21,9%	26,6%	4,8%	5,0%	33,2%	16,1%	9,1%	9,3%	8,8%
2	55,5%	40,8%	15,9%	15,1%	23,1%	47,3%	4,1%	13,2%	4,6%
3							1,3%	1,1%	3,8%
4							3,2%	39,7%	22,1%
5							17,7%		